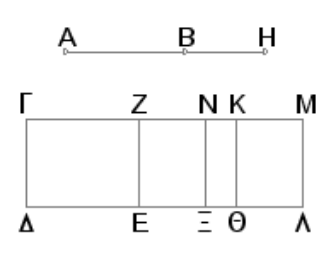
X. 100

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на мањој (ирационали), има за ширину четврту апотому.

Нека је АВ мања (ирационала), ГΔ рационална дуж и на ГΔ конструисани правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ са ширином ГZ.

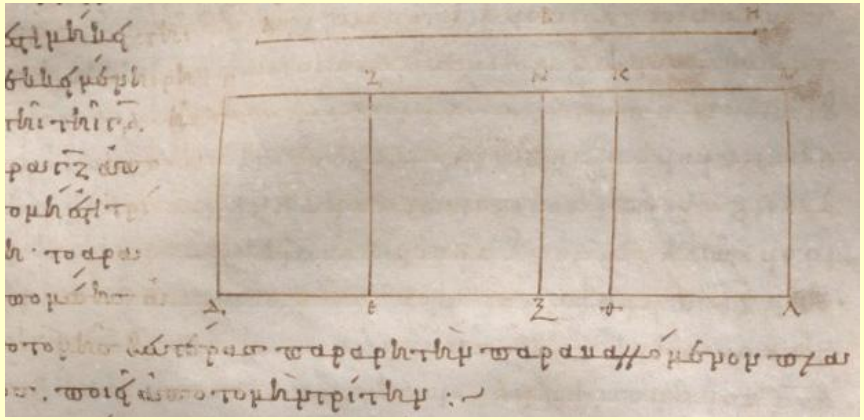


Тврдим да је ГZ четврта апотома.

Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ несамерљиве у степену, збир квадрата на АН и НВ је рационалан, а двоструки правоугаоник обухваћен са АН и НВ је медијалан [X.76][1]. И конструишимо на ГΔ правоугаоник ГΘ, једнак квадрату на АН, са ширином ГК, и правоугаоник КΛ, једнак квадрату на ВН, са ширином КМ. Значи цела површина ГΛ је једнака збиру квадрата на АН и на НВ. Но збир ових квадрата је рационалан, па је рационална и цела површина ГΛ. А она је конструисана на рационалној дужи ГΔ и има ширину ГМ. Значи да је рационална и ГМ и самерљива по дужини са ГΔ [X.20][2]. И пошто је цела површина на ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ, а површина ГЕ једнака квадрату на АВ, биће остатак ZΛ једнак двострукој површини правоугаоника са странама АН и НВ [II.7][3]. Сад преполовимо ZМ тачком N и повуцимо кроз тачку N праву NΞ паралелну свакој од ГΔ и МΛ. Значи свака од површина ZΞ, NΛ једнака је правоугаонику са странама АН и НВ. И пошто је двоструки правоугаоник са странама АН и НВ медијалан и једнак површини ZΛ, медијална је и површина ZΛ. А конструисана је на рационалној дужи ZЕ са ширином ZМ. Према томе је рационална и ширина ZМ и несамерљива по дужини са ГΔ [X. 22][4]. И пошто је

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ:



λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ

---

[1] **X.76** Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је рационалан, и правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "мањи".

[2] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.

[3] **II.7** Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, онда је збир квадрата на целој дужи и на једном од отсечака једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена целом дужи и тим отсечком и квадрата на другом отсечку.

[4] **X.22** Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.

збир квадрата на АН и на НВ рационалан, а двоструки правоугаоник са странама АН и НВ медијалан, биће збир квадрата на АН и на НВ несамерљив са двоструким правоугаоником са странама АН и НВ. Но збир квадрата на АН и на НВ једнак је површини ГΛ, а двоструки правоугаоник са странама АН и НВ - површини ZΛ, према томе је несамерљива и површина ГΛ са површином ZΛ. Но ГΛ је према ZΛ као ГМ према MZ [VI.1] [1], због тога је дуж ГМ несамерљива по дужини са MZ [X.11][2]. И обе су оне рационалне; дакле дужи ГМ и MZ су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин ГZ је апотома [X.73][3].

Тврдим да је четврта.

Заиста, пошто су дужи АН и НВ несамерљиве у степену биће несамерљив и квадрат на АН са квадратом на НВ. И једнака је површина ΓΘ квадрату на АН, а површина КΛ квадрату на НВ. Према томе је несамерљива и површина ΓΘ са површином КΛ. Но и на ΓΘ је према КΛ као ГК према КМ [VI.1], услед тога је дуж ГК несамерљива по дужини са КМ [X.11]. И пошто је за квадрате на АН и на НВ средња пропорционала провугаоник са странама АН и НВ, квадрат на АН једнак површини ΓΘ квадрат на НВ површини КΛ, а правоугаоник са странама АН и НВ површини NΛ, биће за површине ΓΘ и КΛ средња пропорционала површина NΛ. Стога је ΓΘ према NΛ као NΛ према КΛ. Но ΓΘ је према NΛ као ГК према NM, и NΛ према КΛ као NM према КМ [VI.1]. Према томе је ГК према MN као MN према КМ [V.11][4]. Значи правоугаоник са странама ГК и КМ једнак је квадрату на MN [VI.17][5], тј. четвртини квадрата на ZM. Пошто су сад ГМ и MZ две неједнаке дужи и на ГМ је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на MZ са квадратном допуном, наиме правоугаоник са странама ГК и КМ, и он дели ГМ на несамерљиве делове, биће квадрат на ГМ већи од квадрата на MZ за квадрат на дужи која је несамерљива са ГМ [X.18][6]. А цела дуж ГМ је самерљива по дужини са датом рационалном дужи ГΔ. Према томе је ГZ четврта апотома [X.Деф.III.4][7].

На овај начин, правоугаоник конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на мањој (ирационали), има за ширину четврту апотому.

ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΖΛ, καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ [ἐστι] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ: ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ: ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

---

[1] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.

[2] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

[3] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

[4] **V.11** Две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом.

[5] **VI.17** Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.

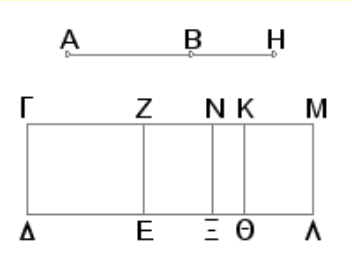
[6] **X.18** Ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове несамерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи. И ако је квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи, и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једанк четвртини квадрата на мањој, он (паралелограм) ће делити већу дуж на делове несамерљиве по дужини.

[7] **X.Деф.III.4** Затим, ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, *апотома* се зове *четврта*.

X. 101

Правоугаоник конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на "дужи која са рационалном образује цело медијално" има за ширину пету апотому.

Нека је АВ "дуж која са рационалном образује цело медијално", ГΔ рационална дуж и на ГΔ је конструисан правоугаоник ГЕ, једнак квадрату на АВ, са ширином ГZ.

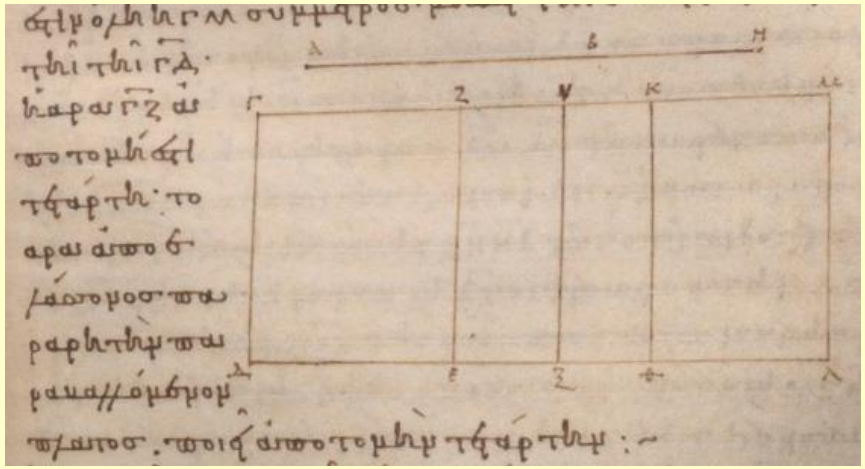


Тврдим да је ГZ пета апотома.

Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ дужи несамерљиве у степену, збир квадрата на њима медијалан, а двоструки правоугаоник образован од њих рационалан [X.77][1]. И конструишимо на ГΔ правоугаоник ГΘ, једнак квадрату на АН, и правоугаоник КΛ, једнак квадрату на НВ. Према томе је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ. Но збир квадрата на АН и на НВ је медијалан, те је медијална и површина ГΛ. А она је конструисана на рационалној дужи ГΔ и има ширину ГМ, због тога је рационална и дуж ГМ и несамерљива са ГΔ [X. 22][2]. И пошто је цела површина на ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ:



λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν

[1] **X.77** Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан, и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима рационалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "дуж која са рационалном образује цело медијално".
[2] **X.22** Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.

НВ, а површина ГЕ једнака квадрату на АВ, биће остатак ZΛ једнак двоструком правоугаонику са странама АН и НВ [II.7][1]. Преполовимо ZМ тачком N и повуцимо кроз N праву NΞ паралелну свакој од ГΔ и МΛ. Тада је свака од површина ZΞ, NΛ једнака правоугаонику са странама АН и НВ. И пошто је двоструки правоугаоник са странама АН, НВ рационалан и једнак површини ZΛ, рационална је и површина ZΛ. И конструисана је на рационалној дужи ЕZ и има ширину ZМ. Према томе је рационална и дуж ZМ и самерљива по дужини са ГΔ [X.20][2]. А како је ГΛ медијално, а ZΛ рационално, биће ГΛ несамерљиво са ZΛ. Но ГΛ је према ZΛ као ГМ према МZ [VI.1] [3], према томе је дуж ГМ несамерљива по дужини са МZ [X.11][4]. И обе су оне рационалне. Значи ГМ и МZ су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин ГZ је апотома [X.73][5].
Тврдим да је пета.
Заиста, слично се доказује да је правоугаоник са странама ГК и КМ једнак квадрату на NМ, тј. четвртини квадрата на ZМ. И пошто је квадрат на АН несамерљив са квадратом на НВ, квадрат на АН једнак једнак површини ГΘ, квадрат на НВ површини КΛ, биће и површина ГΘ несамерљива са површином КΛ. А како је ГΘ према КΛ као ГК према КМ [VI.1], биће несамерљива по дужини и дуж ГК са дужи КМ [X.11]. Пошто су сада ГМ и МZ две неједнаке дужи и на ГМ је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на ZМ, са квадратном допуном, а он дели ГМ на несамерљиве делове, биће квадрат на ГМ већи од квадрата на МZ за квадрат на дужи несамерљивој се ГМ [X.18][6]. И додатак ZМ је несамерљив са датом рационалном дужи ГΔ.

На овај начин је ГZ пета апотома. А то је требало доказати.

ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ ΖΛ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.
Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.
Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ:

ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **II.7** Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, онда је збир квадрата на целој дужи и на једном од отсечака једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена целом дужи и тим отсечком и квадрата на другом отсечку.
[2] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.
[3] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.
[4] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[5] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.
[6] **X.18** Ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове несамерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи. И ако је квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи, и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једанк четвртини квадрата на мањој, он (паралелограм) ће делити већу дуж на делове несамерљиве по дужини.

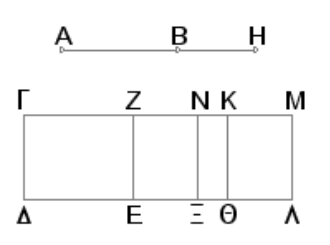
ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ

ДЕСЕТА КЊИГА

X. 102

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на "дужи која са медијалном образује цело медијално", има за ширину шесту апотому.

Нека је АВ "дуж која са медијалном образује цело медијално", ГΔ рационална дуж, и на ГΔ конструисан правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ, са ширином ГZ.

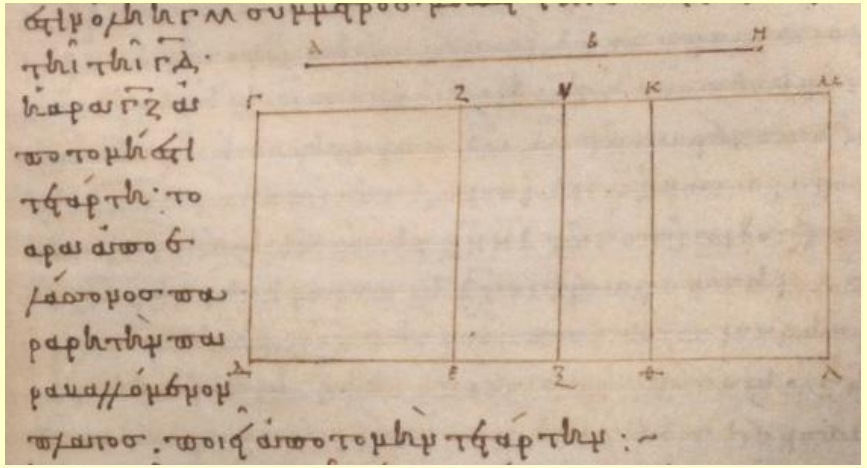


Тврдим да је ГZ шеста апотома.

Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ дужи несамерљиве у степену, збир квадрата на њима је медијалан и двоструки правоугаоник са странама АН и НВ медијалан и збир квадрата на АН и на НВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АН и НВ [X.78][1]. И конструишимо на ГΔ површину ГΘ једнаку квадрату на АН са ширином ГК и површину КА једнаку квадрату на ВН. Према томе је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ. Значи и ГΛ је медијална површина. И конструисана је на рационалној дужи ГΔ са ширином ГМ, због тога је рационална и дуж ГМ и несамерљива по дужини са ГΔ[X. 22][2]. И пошто је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ, а површина ГЕ једнака квадрату на АВ, биће остатак ZΛ једнак двоструком правоугаонику са странама АН и НВ [II.7][3]. И двоструки правоугаоник са странама АН и НВ је медијалан, значи и површина ZΛ је медијална. И конструисана је на ZЕ а има ширину ZМ. Према томе је рационална и дуж ZМ и несамерљива по дужини са ГΔ [X.22]. И пошто је збир квадрата на АН и на НВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су странама АН и НВ, и збиру квадрата на АН и НВ је једнака површини ГΛ, а двоструки правоугаоник са

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ:



λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω

---

[1] **X.78** Ако се од дужи одузме дуж несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, а збир квадрата на тим дужима је несамерљив са двоструким правоугаоником истих страна, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "дуж која са медијалном образује цело медијално".

[2] **X.22** Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.

[3] **II.7** Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, онда је збир квадрата на целој дужи и на једном од отсечака једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена целом дужи и тим отсечком и квадрата на другом отсечку.

странама АН и НВ једнак површини ZΛ, биће несамерљива и површина ГΛ са површином ZΛ. Но ГΛ је према ZΛ као ГМ према MZ [VI.1] [1], па према томе су несамерљиве по дужини и дужи ГМ и MZ [X.11][2]. И обе су рационалне. На овај начин су дужи ГМ и MZ рационалне, самерљиве само у степену. А према томе је ГZ апотома [X.73][3].

Тврдим да је шеста.

Заиста, пошто ZΛ једнако двостуком правоугаонику са странама АН и НВ, преполовимо ZМ тачком N и повуцимо кроз тачку N праву NΞ паралелну ГΔ. Тада је свака од површина ZΞ и NΛ једнака правоугаонику са странама АН и НВ. И пошто су дужи АН и НВ несамерљиве у степену, биће и квадрат на АН несамерљив са квадратом на НВ. Но квадрат на АН је једнак површини ГΘ, а квадрат на НВ једнак површини КΛ. На тај начин је и површина ГΘ несамерљива са површином КΛ. Но ГΘ је према КΛ као дуж ГК према дужи КМ [VI.1]. Значи и дуж ГК је несамерљива са дужи КМ [X.11]. И пошто је за квадрате на АН и на НВ средња пропорционала правоугаоник са странама АН и НВ, квадрат на АН једнак је површини ГΘ, квадрат на НВ једнак површини КΛ и правоугаоник са странама АН и НВ једнак површини NΛ, биће и за површине ГΘ и КΛ средња пропорционала површина NΛ. Но ГΘ је према NΛ као NΛ према КΛ. Из истих разлога квадрат на ГМ је већи од квадрата на MZ за квадрат на дужи несамерљивој са ГМ [X.18][4]. И ниједна од њих није самерљива са датом рационалном дужи ГΔ.

На овај начин ГZ је шеста апотома. А то је требало доказати.

οὖν ἡ ZΜ δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ NΞ: ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ ZΛ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ZΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ZΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ZΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ZΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν MZ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, MZ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς MZ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ:

ἡ ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστι πέμπτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.

[2] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

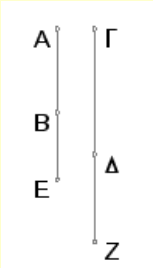
[3] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

[4] **X.18** Ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове несамерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи. И ако је квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи, и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једанк четвртини квадрата на мањој, он (паралелограм) ће делити већу дуж на делове несамерљиве по дужини.

X. 103

Дуж самерљива по дужини са апотомом је апотома и то истога реда.

Нека је АВ апотома и ГΔ дуж самерљива по дужини са АВ.

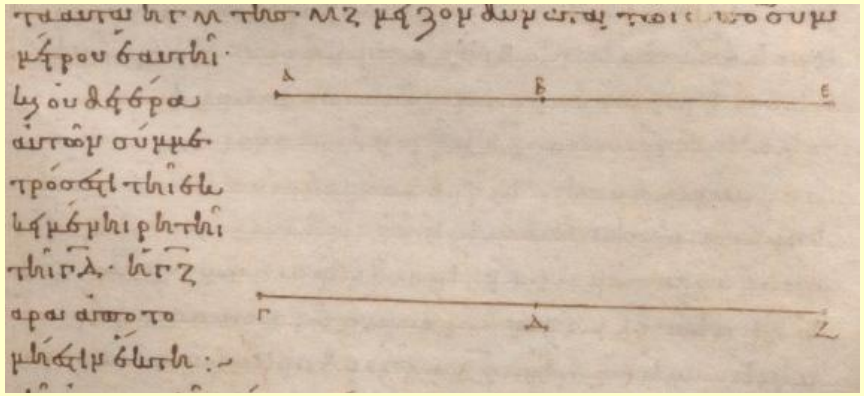


Тврдим да је ГΔ апотома и истога реда као и АВ.

Заиста, пошто је АВ апотома, нека ВЕ буде њен додатак. Тада су дужи АЕ и ЕВ рационалне и самерљиве само у степену [X.73][1]. И начинимо тако да АВ буде према ГΔ у истом односу као што је ВЕ према ΔZ [VI.12][2]. Но део једног целог је према одговарајућем делу другог целог као прво цело према другом [V.12][3]. И према томе је цела дуж АЕ према целој дужини ГZ као АВ према ГΔ. Но дуж АВ је самерљива по дужини са ГΔ, па је према томе самерљива и дуж АЕ са ГZ, а ВЕ са ΔZ [X.11][4]. И АЕ и ЕВ су рационалне самерљиве само у степену, значи и дужи ГZ и ZΔ рационалне и самерљиве само у степену [X.13][5]. (На овај начин, ГΔ је апотома.
Тврдим да је она истога реда ка и АВ)
Пошто је сад АЕ према ГZ као ВЕ према ΔZ, биће, после измене реда средњих чланова, АЕ према ЕВ као ГZ према ZΔ [V.16][6]. Тада је квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи која је или самерљива са АЕ или несамерљива. Ако је квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи самерљивој са

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ:



λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ: καὶ ὡς ἓν ἄρα πρὸς ἕν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα: ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.
Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.]
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς

[1] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.
[2] **VI.12** За три дате дужи наћи четврту пропорционалу.
[3] **V.12** Ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних.
[4] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[5] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.
[6] **V. 16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.

АЕ, биће и квадрат на ГZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи самерљивој са ГZ [X.14][1]. И ако је дуж АЕ самерљива по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ГZ [X.12][2], а ако је самерљива дуж ВЕ, биће и ΔZ, а ако ниједна од АЕ и ЕВ није самерљива, неће бити ниједна ни од ГZ и ZΔ [X.13]. А ако је, квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи несамерљивој са АЕ, биће и квадрат на ГZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи несамерљивој са ГZ [X.14]. И ако је АЕ самерљиво по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ГZ, а ако је ВЕ, биће и ΔZ [X.12], а ако ниједна од АЕ и ЕВ, неће бити ниједна ни од ГZ и ZΔ.

На овај начин ГΔ је апотома и то истога реда као и АВ. А то је требало доказати.

ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὴ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ [τῆς ΕΒ] μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

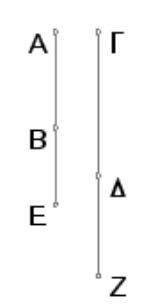
[1] **X.14** Ако су дате четири пропорционалне дужи и квадрат прве је већи од квадрата друге за квадрат дужи самерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи самерљиве по дужини са трећом. И ако је квадрат прве већи од квадрата друге за квадрат дужи несамерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи несамерљиве по дужини са трећом.

[2] **X.12** Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.

X. 104

Дуж самерљива са медијалном апотомом је медијална апотома и то истога реда.

Заиста, пошто је АВ медијална апотома, нека је ЕВ њен додатак. Према томе су АЕ и ЕВ медијале самерљиве само у степену [X.74[1],X.75[2]]. И начинимо тако да буде АВ према ΓΔ као ВЕ према ΔZ [VI.12][3]. Значи и дуж АЕ самерљива је са ΓZ, а дуж ВЕ са ΔZ [V.12[4], X.11[5]]. Но АЕ и ЕВ су медијале самерљиве само у степену. Значи и ΓZ и ZΔ су медијале [X.23][6] самерљиве само у степену [X.13][7]. На овај начин је ΓΔ апотома [X.74, X.75].



Тврдим да је истога реда као и АВ.

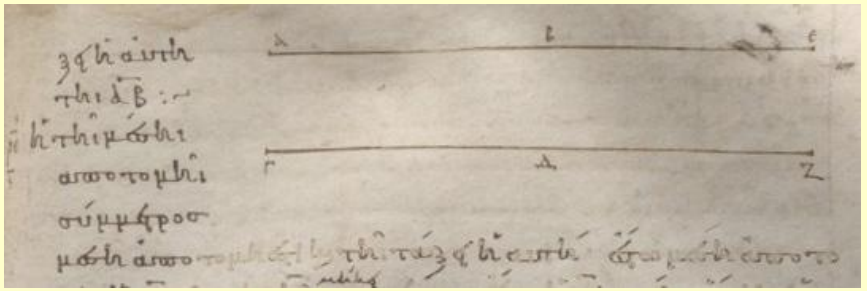
Заиста, пошто је АЕ према ЕВБ као ΓZ према ZΔ (но АЕ је према ЕВ као квадрат на АЕ према правоугаонику са странама АЕ и ЕВ, а ΓZ је према ZΔ као квадрат на ΓZ према правоугаонику са странама ΓZ и ZΔ), биће квадрат на АЕ према правоугаонику са станама АЕ и ЕВ као квадрат на ΓZ према правоугаонику са странама ΓZ и ZΔ (и, после пермутације, квадрат на АЕ према квадрату на ΓZ као правоугаоник са странама АЕ и ЕВ према правоугаонику са странама ΓZ и ZΔ). Но

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ:

λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΒ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ:



σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ. Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ [γάρ] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ,

---

[1] **X.74** Ако се од медијале одузме медијала, самерљива са целом само у степену, која обухвата са целом дужи рационалан правоугаоник биће остатак ирационалан. Нека се он зове прва апотома медијале.
[2] **X.75** Ако се од медијале одузме медијала, самерљива са целом само у степену, која са целом обухвата медијалан правоугаоник, биће остатак ирационалан. Нека се он зове друга апотома медијале.
[3] **VI. 12** За три дате дужи наћи четврту пропорционалу.
[4] **V.12** Ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних.
[5] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[6] **X.23** Величина самерљива са медијалом је медијала.
[7] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.

квадрат на АЕ је самерљив са квадратом на ГZ. Значи самерљив је и правоугаоник са странама АЕ и ЕВ са правоугаоником са странама ГZ и ZΔ [V.16[1], X.11]. Сад, ако је правоугаоник са странама АЕ и ЕВ рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ [X.Деф.4][2], а ако је правоугаоник с странама АЕ и ЕВ медијалан, биће медијалан и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ [X.23.Последица][3].

На овај начин, дуж самерљива са медијалном апотомом је медијалан апотома и то истога реда. А то је требало доказати.

ZΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.

[2] **X.Деф.4** И зваћемо квадрат на датој дужи *рационалним* и са њим самерљиве површине *рационалним*, а несамерљиве - *ирационалним* и дужи на којима су ови квадрати - *ирационалним*, при чему, ако су то заиста квадрати, дужи су стране квадрата, а ако су то друге неке праволиниске слике, онда су то стране њима једнаких квадрата.

[3] **X.23.Последица** Површина самерљива са медијалном површином је и сама медијална [Лема која следи из X.18][3] јер су стране квадрата једнаких тим површинама самерљиве само у степену, и ако је једна медијала и друга је медијала.

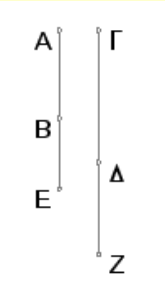
X. 105

Дуж самерљива са мањом (ирационалом) је мања.

Нека је АВ мања и ГΔ дуж самерљива са АВ.

Тврдим да је и ГΔ мања.

Заиста, урадимо исто што и раније.



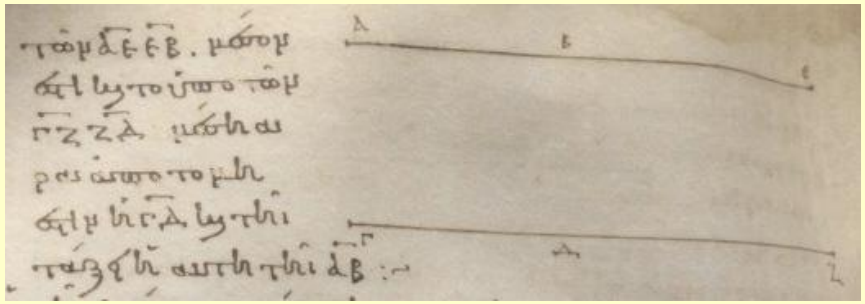
И пошто су дужи АЕ и ЕВ несамерљиве у степену [X.76][1], биће ГZ и ZΔ несамерљиве у степену [X.13][2]. Сад, пошто је АЕ према ЕВ као ГZ према ZΔ [V.12[3], V.16[4]], биће и квадрат на АЕ према квадрату на ЕВ као квадрат на ГZ према квадрату на ZΔ [VI.22][5]. И, после спајања, збир квадрата на АЕ и на ЕВ је према квадрату на ЕВ као збир квадрата на ГZ и на ZΔ према квадрату на ZΔ [V.18][6] (и са пермутацијом). Но квадрат на ВЕ је самерљив са квадратом на ZΔ [V.16[7], X.11[8]]. Но збир квадрата на АЕ и на ЕВ је рационалан [X.76], због тога је и и збир квадрата на ГZ и на ZΔ рационалан [X.Деф.4][9]. Затим, пошто је квадрат на

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ:

λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά:



καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]: σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ: σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν

---

[1] **X.76** Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је рационалан, и правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "мањи".
[2] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.
[3] **V.12** Ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних.
[4] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.
[5] **VI.22** Ако су четири дужи пропорционалне, онда су и на њима конструисане сличне и у сличном положају праволинијске слике пропорционалне; и ако су на њима конструисане сличне и у сличном положају праволинијске слике пропорционалне, пропорционалне су и дужи.
[6] **V.18** Ако су величине, узете одвојено, пропорционалне, оне су пропорционалне и заједно узете.
[7] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.
[8] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[9] **X.Деф.4** И зваћемо квадрат на датој дужи *рационалним* и са њим самерљиве површине *рационалним*, а несамерљиве - *ирационалним* и дужи на којима су ови квадрати - *ирационалним*, при чему, ако су то заиста квадрати, дужи су стране квадрата, а ако су то друге неке праволиниске слике, онда су то стране њима једнаких квадрата.

АЕ према правоугаонику са странама АЕ и ЕВ као квадрат на ГZ према правоугаонику са странама ГZ и ZΔ, а квадрат на АЕ је самерљив са квадратом на ГZ, биће самерљив и правоугаоник коме су стране АЕ и ЕВ са правоугаоником коме су стране ГZ и ZΔ. Но правоугаоник са странама АЕ и ЕВ је медијалан [X.76], значи медијалан је и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ [X.23.Последица][1]. [X.23.Последица][1]. Према томе су дужи ГZ и ZΔ несамерљиве у степену и збир квадрата образованих на њима је рационалан, а правоугаоник од њих медијалан.

На овај начин ГΔ је мања (ирационала). А то је требало доказати.

ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ: μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **X.23.Последица** Површина самерљива са медијалном површином је и сама медијална [Лема која следи из X.18][1] јер су стране квадрата једнаких тим површинама самерљиве само у степену, и ако је једна медијала и друга је медијала.

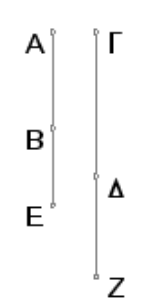
X. 106

Дуж самерљива са "дужи која са рационалном образује цело медијално" је дуж која са рационалном образује цело медијално.

Нека је АВ дуж која са рационалном образује медијално и ГΔ дуж самерљива са АВ.

Тврдим да ја ГΔ дуж која са рационалном образује цело медијално.

Заиста, нека је ВЕ додатак за АВ.



Тада су АЕ и ЕВ дужи несамерљиве у степену, оне образују медијалан збир квадрата на АЕ и на ЕВ и рационална правоугаоник са овим странама [X.77][1]. И урадимо исто што и раније. Слично претходном се доказује да су ГZ и ZΔ у истој размери као и АЕ и ЕВ и да је збир квадрата на АЕ и на ЕВ самерљив са збиром квадрата на ГZ и на ZΔ, а правоугаоник коме су стране АЕ и ЕВ самерљив са правоугаоником коме су стране ГZ и ZΔ. Према томе су дужи ГZ и ZΔ несамерљиве у степену и образују медијалан збир квадрата на ГΔ и рационалан правоугаоник од њих.

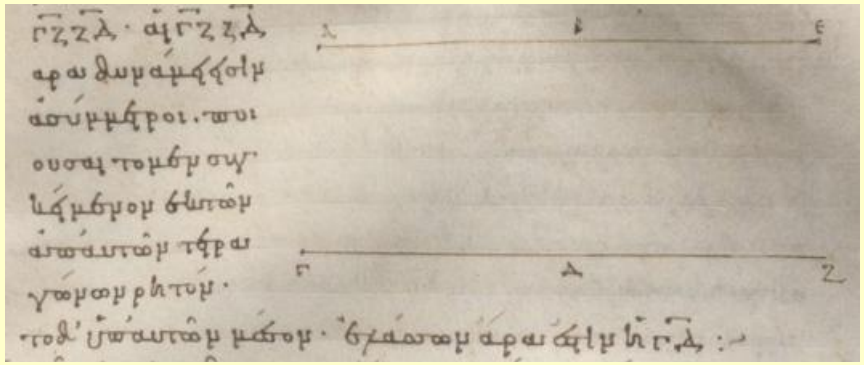
На овај начин, ГΔ је дуж која са рационалном образује цело медијално. А то је требало доказати.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ:

λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ:



αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **X.77** Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан, и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима рационалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "дуж која са рационалном образује цело медијално".

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ

ДЕСЕТА КЊИГА

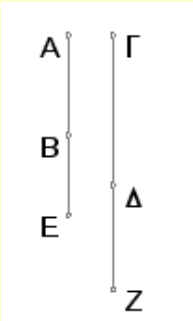
X. 107

Дуж самерљива са "дужи која са медијалном образује цело медијално" и сам је дуж која са медијалном образује цело медијално.

Нека је АВ дуж која са медијалном образује цело медијално и ГΔ дуж самерљива са АВ.

Тврдим да је ГΔ дуж која са медијалном образује цело медијално.

Заиста, нека је ВЕ додатак за АВ. И урадимо исто што и раније.



Тада су дужи АЕ и ЕВ несамерљиве у степену, образују медијалан збир квадрата на њима и медијалан праВвоугаоник са тим странама и тај збир квадрата је несамерљив са тим правоугаоником [X.78][1]. И тада уз, како је доказано, дужи АЕ и ЕВ самерљиве и са дужима ГZ и ZΔ, и збир квадрата на АЕ и на ЕВ је самерљив са збиром квадрата на ГZ и ZΔ, и правоугаоник коме су стране АЕ и ЕВ са правоугаоником коме су стране ГZ и ZΔ. Према томе су дужи ГZ и ZΔ несамерљиве у степену, образују медијалан збир квадрата на њима и медијалан правоугаоник од њих и тај збир квадрата је несамерљив са тим правоугаоником.

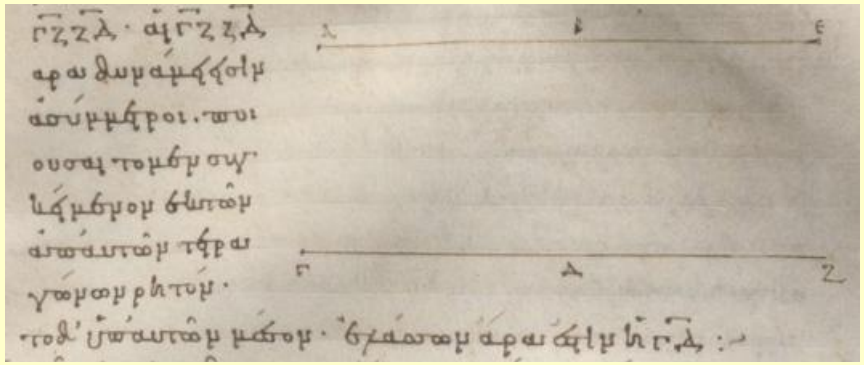
На овај начин, дуж која са медијалном образује цело медијално и сам је дуж која са медијалном образује цело медијално. А то је требало доказати.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ:

λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω:



αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **X.78** Ако се од дужи одузме дуж несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, а збир квадрата на тим дужима је несамерљив са двоструким правоугаоником истих страна, биће остатак ирационалан. Нека се он зове "дуж која са медијалном образује цело медијално".

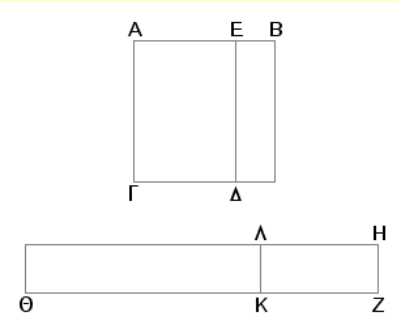
X. 108

При одузимању медијалне површине од рационалне појављују се две ирационалне дужи, апотома или мања.

Нека су од рационалне површине ВГ одузима медијална површина ВΔ.

Тврдим да је страна квадрата једнаког површини ЕГ једна од две ирационалне апотома или мања.

Заиста, узмимо рационалну дуж ZH, конструишимо на ZH правоугли паралелограм НΘ једнак површини ВГ и одузмимо НК, једнак површини ΔВ.



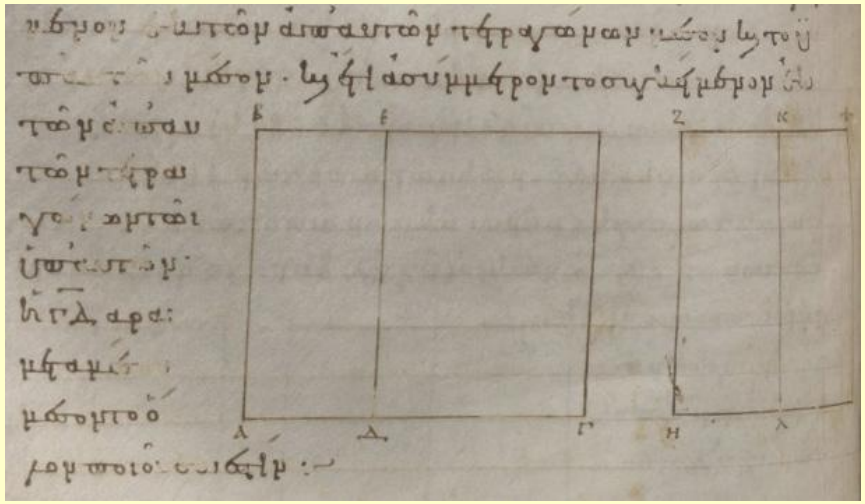
Тада је остатак ΛΘ једнак ЕГ. Сад, пошто је површина ВГ рационална, а ВΔ медијална, а ВГ је једнако НΘ, а ВΔ једнако НК, биће НΘ рационалано, а НК медијално. И те површине су конструисане на рационалној дужи ZH. Значи да је рационална и дуж ZΘ и самерљива по дужини са ZH [X.20][1], рационалан је и дуж ZK и несамерљива по дужини са ZH [X.22][2]. Према томе је дуж ZΘ несамерљива по дужини са ZK [X.13][3]. Дакле дужи ZΘ и ZK су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин, KΘ је апотома [X.73][4], а KZ је њен додатак. И квадрат на ΘZ је већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи или самерљивој са ΘZ или несамерљивој.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ:

λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ:



λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ

[1] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.
[2] **X.22** Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.
[3] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.
[4] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

Нека је прво за квадрат на дужи самерљивој. И цела дуж ΘZ је самерљива по дужини са датом рационалном дужи ZH. Тада је KΘ прва апотома [X.Деф.III.1][1]. И страна квадрата, који је једнак правоугаонику обухваћеном рационалном дужи и првом апотомом, једнака је апотоми [X.91][2]. Значи страна квадрата, који је једнак површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака је апотоми.
А ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи незамерљивој са ΘZ, и цел дуж ZΘ је самерљива по дужини са узетом рационалном дужи ZH, биће KΘ четврта апотома [X.Деф.III.4][3].

И страна квадрата једнаког површини обухваћеној рационалном дужи и четвртом апотомом, једнака је мањој. А то је требало доказати.

HK. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται: ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ZΘ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ ZK μήκει. αἱ ZΘ, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ KΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ KZ. ἤτοι δὴ ἡ ΘZ τῆς ZK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΘZ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH: ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ KΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ЕГ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. Εἰ δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ ZΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ KΘ.

τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **X.Деф.III.1** Дате су рационална дуж и апотома. Ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи самерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, *апотома* се зове *прва*.
[2] **X.91** Ако је површина обухваћена рационалном дужи и првом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну апотому.
[3] **X.Деф.III.4** Затим, ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, *апотома* се зове *четврта*.

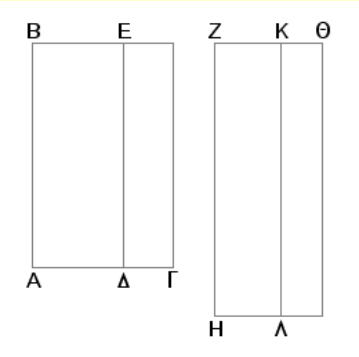
X. 109

При одузимању рационалне површине од медијалне појављују се две ирационалне дужи, прва медијална апотома или дуж која са рационалном образује цело медијално.

Нека се од медијалне површине ВГ одузме рационална површина ВΔ.

Тврдим, да се као страна квадрата, једнаког површини остатка ЕГ, појављује једна од две ирационалне, или прва медијална апотома, или дуж која са рационалном образује цело медијално.

Заиста, узмимо рационалну дуж ZH и слично претходном конструишимо површине.



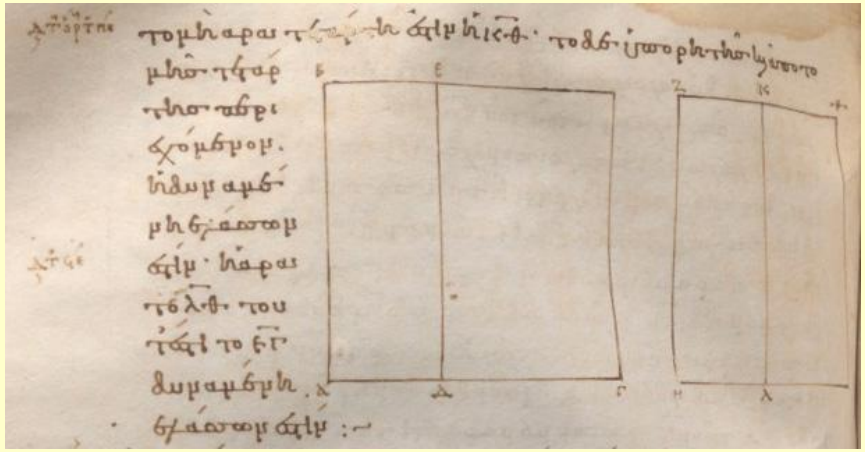
Тада следује да је дуж ZΘ рационална и несамерљива по дужини са ZH, а KZ је рационална и самерљива по дужини са ZH. Према томе су ZΘ и ZK рационалне и самерљиве само у степену [X.13][1]. На тај начин, KΘ је апотома и ZK је њен додатак [X.73][2]. И тада је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи или самерљивој са ΘZ или несамерљивој са ΘZ.
Сад, ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи самерљивој са ΘZ и додатак ZK је самерљив по дужини са датом рационалном дужи ZH, дуж KΘ је друга апотома [X.Деф.III.2][3]. Но дуж ZH је рационална. Према томе страна

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ.

λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία.



ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει: αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ: ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον

[1] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.
[2] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.
[3] **X.Деф.III.2** А ако је додатак самерљив по дужини са датом рационалном дужи и квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат дужи самерљиве са целом дужи, *апотома* се зове *друга*.

квадрата једнаког површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака је првој медијалној апотоми [X.92][1].
А ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи несамерљивој са ΘZ и додатак ZK је самерљив по дужини са узетом рационалном дужи ZH, биће KΘ пета апотома.

И страна квадрата, једнаког површини ЕГ, једнака је "дужи која са рационалном образује цело медијално". А то је требало доказати.

δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZK σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ KΘ:

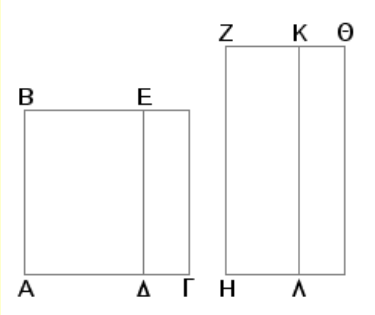
ὥστε ἡ τὸ ЕГ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **X.92** Ако је површина обухваћена рационалном дужи и другом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну прву апотому медијале.

X. 110

При одузимању од једне медијалне површине друге медијалне површине, несамерљиве са првом, појављују се две остале ирационале друга медијална апотома или дуж која са медијалном образује цело медијално.

Одузмимо, слично као на претходним сликама, од медијалне површине ВГ медијалну површину ВΔ несамерљиву са целом.

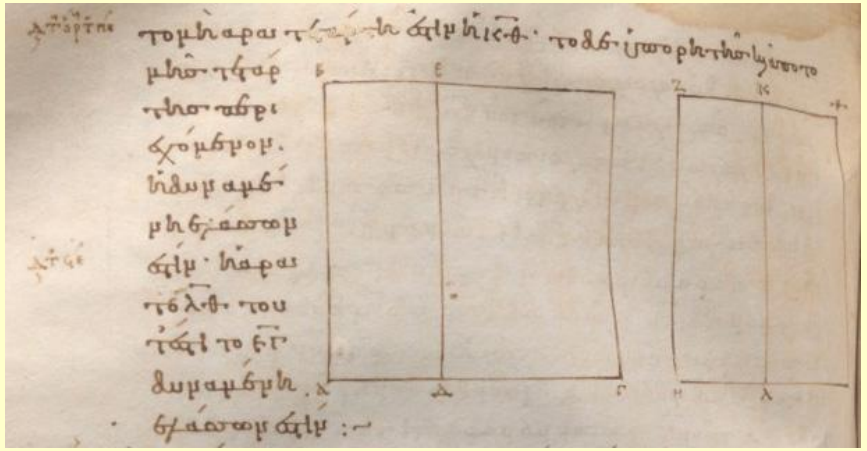


Тврдим, да се као страна квадрата једнаког површини ЕГ појављује једна од две ирационале, или друга медијална апотома или дуж која са медијалном образује цело медијално.

Заиста, пошто је свака од површина ВГ и ВΔ медијална и ВГ је несамерљиво са ВΔ, биће свака од ZΘ и ZK рационална и несамерљива по дужини са ZH [X.22][1]. И пошто је ВГ несамерљиво са ВΔ, тј. НΘ са НК, биће и ΘZ несамерљиво са ZK [VI.1[2], X.11[3]]. Према томе су дужи ZΘ и ZK рационалне и самерљиве само у степену. Значи, КΘ је апотома [X.73][4] (а ZK је додатак. И квадрат на ZΘ је већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи, која је или самерљива са ZΘ или несамерљива).
Ако је квадрат на ZΘ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи самерљивој са

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ:



λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ZΘ, ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘZ τῇ ZK: αἱ ZΘ, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [

[1] **X.22** Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.
[2] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.
[3] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[4] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

ZΘ, и ниједна од ZΘ и ZK није самерљива по дужини са датом дужи ZH, биће KΘ трећа потома [X.Деф.III.3][1]. Но KΛ је рационалан дуж, а правоугаоник обухваћен рационалном дужи и трећом апотомом је ирационалан, и страна једнаког му квадрата такође је ирационална и зове се друга медијална апотома [X.93][2]. Према томе је страна квадрата једнаког површини ΛΘ, тј, површини ЕГ, једнака другој медијалној апотоми.
А ако је квадрат на ZΘ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са ZΘ, и ниједна од дужи ΘZ и ZK није самерљива по дужини са ZH, KΘ је шеста апотома [X.Деф.III.6][3]. Но страна квадрата, једнаког правоугаонику обухваћеном рационалном дужи и шестом апотомом, једнака је "дужи која са медијалном образује цело медијално" [X.96][4].

На овај начин, страна квадрата једнаког површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака је "дужи која са медијалном образује цело медијално". А то је требало доказати.

προσαρμόζουσα δὲ ἡ ZK. ἤτοι δὴ ἡ ZΘ τῆς ZK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ]. Εἰ μὲν δὴ ἡ ZΘ τῆς ZK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐθετέρα τῶν ZΘ, ZK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH, ἀποτομὴ τρίτη ἐστὶν ἡ KΘ. ῥητὴ δὲ ἡ KΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα: ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Εἰ δὲ ἡ ZΘ τῆς ZK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐθετέρα τῶν ΘZ, ZK σύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, ἀποτομὴ ἕκτη ἐστὶν ἡ KΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **X.Деф.III.3** А ако је ниједна дуж (ни цела дуж ни додатак) није самерљива по дужини са датом рационалном дужи и квадрат на целој дужи је већи од квадрата на додатку за квадрат дужи самерљиве са целом дужи, *апотома* се зове *трећа*.
[2] **X.93** Ако је површина обухваћена рационалном дужи и трећом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну другу апотому медијале.
[3] **X.Деф.III.6** Ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са целом дужи и ниједна дуж није самерљива по дужини са датом рационалном дужи, *апотома* се зове *шеста*.
[4] **X.96** Ако је површина обухваћена рационалном дужи и шестом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну "дуж која са медијалном образује медијално".

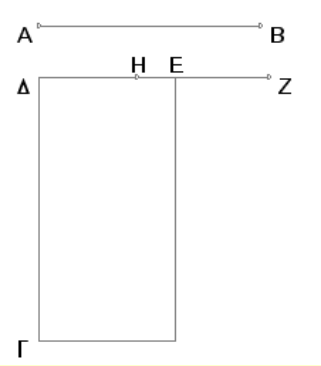
X. 111

Апотома није исто што и биномијала.

Нека је АВ апотома.

Тврдим, да АВ није исто што и биномијала.

Заиста, ако је могуће, нека буде исто. Узмимо рационалну дуж ΔГ и конструишимо на ГΔ правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ са ширином ΔЕ.



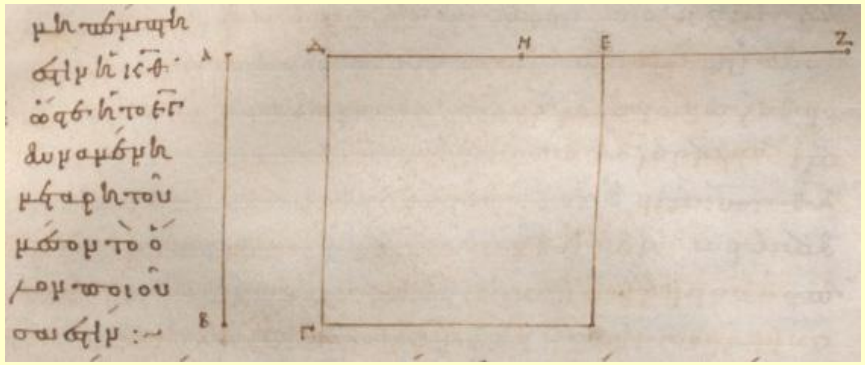
Пошто је АВ апотома, биће ΔЕ прва апотома [X.97][1], а ЕZ њен додатак. Према томе су ΔZ и ZЕ рационалне дужи самерљиве само у степену. И квадрат на ΔZ је већи од квадрата на ZЕ за квадрат на дужи самерљивој са ΔZ и ΔZ је самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи ΔГ [X.Деф.III.1][2]. Затим, пошто је АВ биномијала, биће ΔЕ прва биномијала [X.60][3]. Поделимо је на рационалне делове тачком Н и нека је већи део ΔН. Тада су дужи ΔН и НЕ рационалне, самерљиве само у степену. И квадрат на ΔН је већи од квадрата на НЕ за квадрат на дужи самерљивој са ΔН и већи део ΔН је самерљив по дужини са узетом рационалном дужи ΔГ [X.Деф.II.1][4]. Значи ΔZ је самерљиво по дужини са ΔН [X.12][5]. Па према

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ:

λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω: καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ.



ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ: αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ: αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ μεῖζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ

[1] **X.97** Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на апотоми, има за ширину прву апотому.
[2] **X.Деф.III.1** Дате су рационална дуж и апотома. Ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи самерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, *апотома* се зове *прва*.
[3] **X.60** Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку површини квадрата на биномијали, његова ширина је прва биномијала.
[4] **X.Деф.II.1** Дата је рационална дуж и биномијала подељена на два дела тако да је квадрат на већем делу већи од квадрата на мањем за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са већим делом. Ако је тај већи део самерљив по дужини са датом рационалном дужи, цела дуж се зове *прва биномијала*.
[5] **X.12** Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.

томе и остатак HZ је самерљив по дужини са ΔZ [X.15][1]. Пошто је сад ΔZ самерљиво са HZ, а ΔZ је рационално, биће рационално и HZ. Пошто је ΔZ самерљиво по дужини са HZ, несамерљиво је по дужини ΔZ и EZ. Према томе је несамерљиво по дужини и ZH са EZ [X.13][2]. Дакле дужи HZ и ZE су рационале самерљиве само у степену. На овај начин EH је апотома [X.73][3]. Али она је рационална. А то је немогуће.

На овај начин, апотома није исто што и биномијала. А то је требало доказати.

Последица

Апотома и ирационале које јој следују нису исте ни са медијалом ни међу собом.

Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на медијали, је конструисан на датој рационалној дужи, има за ширину рационалну дуж несамерљиву по дужини са дужи, на којој је конструисан правоугаоник, а правоугаоник, једнак квадрату на апотоми, конструисан на датој рационалној дужи, има за ширину прву апотому, једнак квадрату на првој медијалној апотоми има за ширину другу апотому једнак квадрату на другој медијалној апотоми има за ширину трећу апотому, једнак квадрату на мањој има за ширину четврту апотому, једнак квадрату на "дужи која са рационалном образује цело медијално" има за ширину пету аотому, једнак квадрату на "дужи која са медијалном образује цело медијално" има за ширину шесту апотому. Пошто се сад наведене ширине разликују како од прве, тако и једна од друге: од прве, јер је она рационална, а једна од друге, јер нису истог реда, јасно је да се и саме ирационале разликују једна од друге. И пошто је доказано да апотома није исто што и биномијала, и затим оне ирационале, које следују после апотоме, дају при конструкцији правоугаоника на рационалној дужи, као ширине, апотоме свака свог реда, а оне које следују после биномијале дају, као ширине, биномијале свога реда, онда су различите једне и друге ирационале.

На овај начин, према реду, имамо свега 13 ових ирационала:

Медијала,
Биномијала,
Прва бимедијала,
Друга бимедијала,

μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔZ τῇ HZ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔZ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ HZ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔZ τῇ HZ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔZ τῇ EZ μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH τῇ EZ μήκει. αἱ HZ, ZE ἄρα ῥηταί [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EH. ἀλλὰ καὶ ῥητή: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὐτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο

ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους <ιγ>,

Μέσην,
Ἐκ δύο ὀνομάτων,
Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
Μείζονα,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,

---

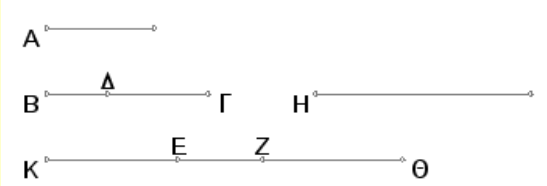
[1] **X.15** Ако се саберу две самерљиве величине биће и збир самерљив са сваком од њих, а ако је збир самерљив са једном од њих (са једним сабирком), биће и полазне величине (сабирци) самерљиве.
[2] **X.13** Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.
[3] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

"Већа", Страна квадрата једнаког збиру рационале и медијалне површине, Страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине, Апотома, Прва медијална апотома, Друга медијална апотома, "Мања", "Дуж која са рационалном образује цело медијално", "Дуж која са медијалном образује цело медијално".	Δύο μέσα δυναμένην, Ἀποτομήν, Μέσης ἀποτομὴν πρώτην, Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν, Ἐλάσσονα, Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν, Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

X. 112

Квадрат на рационалној дужи, конструисан на биномијали има за ширину апотому, чије су рационале самерљиве са рационалама биномијале и у истој размери, и тако добивена апотома је истога реда као и биномијала.

Нека је А рационална дуж, а ВГ биномијала, чија је већа рационала ΛГ, и квадрат на А једнак правоугаонику са странама ВГ и ЕZ.

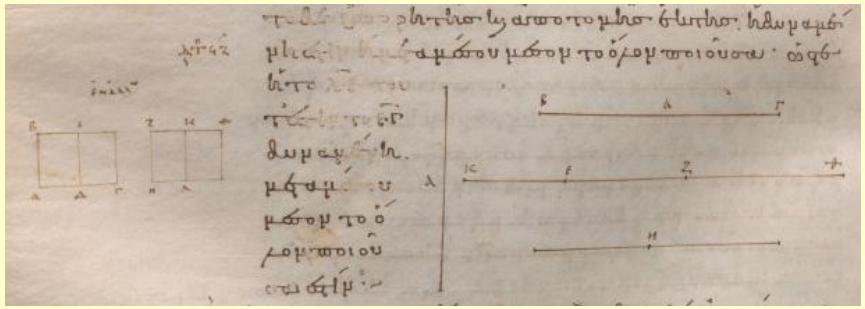


Тврдим да је ЕZ апотома чији су делови самерљиви са ГΔ и ΔВ, и у истој размери и да је ЕZ истога реда као и ВГ.

Заиста, нека је поново квадрат на А једнак правоугаонику са странама ВΔ и Н. Пошто је сад правоугаоник са странама ВГ и ЕZ једнак правоугаонику са странама ВΔ и Н, биће ГВ према ВΔ као Н према ЕZ [VI.16][1]. Но ГВ је веће од ВΔ, према томе и Н је веће од ЕZ [V.16[2], V.14[3]]. Нека је ЕΘ једнако Н. Тада ГВ према ВΔ као ΘЕ према ЕZ. И, после одвајања, ГΔ је према ВΔ као ΘZ према ZЕ [V.17][4]. Начинимо тако да буде ΘZ према ZЕ ка ZК према КЕ. И цело ΘК је према целом КZ као ZК према КЕ, јер је један претходни према једном наредном као сви претходни према свима наредним [V.12][5]. И ZК је према КЕ као ГΔ према ΔВ [V.11][6]. Значи, ΘК је према КZ као ГΔ према ΔВ. Но квадрат на ГΔ је самерљив са квадратом на ΔВ [X.36][7]. Па према томе је самерљив и квадрат на ΘК са квадратом квадратом на КZ [VI.22[8], X.11[1]]. И квадрат на ΘК је према квадрату на КZ као ΘК

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ:



λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ: μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ: διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς

---

[1] **VI.16** Ако су четири дужи пропорционалне, правоугаоник обухваћен крајњим (дужима) једнак је правоугаонику обухваћеном средњима (дужима); и ако је правоугаоник, обухваћен крајњим, једнак правоугаонику обухваћеном средњим, те четири дужи су пропорционалне.
[2] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.
[3] **V.14** Ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања - мања.
[4] **V.17** Ако су величине, узете заједно, пропорционалне, оне су пропорционалне и одвојено узете.
[5] **V.12** Ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних.
[6] **V.11** Две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом.
[7] **X.36** Ако се саберу две рационалне дужи, самерљиве само у степену, биће цела дуж ирационална: нека се зове биномијала.
[8] **VI.22** Ако су четири дужи пропорционалне, онда су и на њима конструисане сличне и у сличном положају праволинијске слике пропорционалне; и ако су на њима конструисане сличне и у сличном положају праволинијске слике пропорционалне, пропорционалне су и дужи.

ΘК према КЕ, уколико су три дужи ΘК, КZ и КЕ пропорционалне [V.Деф.9][2]. Значи ΘК је самерљиво по дужини са КЕ. На тај начин и ΘЕ је самерљиво по дужини са ЕК ГΛ [X.15][3]. И пошто је квадрат на А једнак правоугаонику са странама ЕΘ и ВΔ, а квадрат на А рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама ЕΘ и ВΔ. И конструисан је на рационалној дужи ВΔ. Па према томе је рационална и дуж ЕΘ и самерљива по дужини са ВΔ [X.20][4]. На тај начин и самерљива са њом ЕК је такође рационална и самерљива по дужини са ВΔ. Пошто је сад ГΔ према ΔВ као ZК према КЕ и ГΔ и ΔВ су самерљиве само у степену, биће и ZК и КЕ самерљиве само у степену [X.11][5]. Но дуж КЕ је рационалан. Значи да је рационална и дуж ZК. Према томе су дужи ZК и КЕ рационалне, самерљиве само у степену. И овај начин ЕZ је апотома [X.73][6].

Но квадрат на ГΔ је већи од квадрата на ΔВ за квадрат на дужи која је или самерљива са ГΔ или несамерљива.

Ако је квадрат на ГΔ већи од квадрата на ΔВ за квадрат на дужи самерљивој са ГΔ, биће и квадрат на ZК већи од квадрата на КЕ за квадрат на дужи самерљивој са ZК [X.14][7]. И ако је дуж ГΔ самерљива по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ZК [X.11, X.12[8]], ако је ВΔ самерљива, биће самерљива и КЕ [X.12], ако није ниједна од ГΔ и ΔВ самерљива, неће бити ниједна ни од ZК и КЕ.

А ако је квадрат на ГΔ већи од квадрата на ΔВ за квадрат на дужи несамерљивој са ГΔ, биће и квадрат на ZК већи од квадрата на КЕ за квадрат на дужи несамерљивој са ZК [X.14]. И ако је дуж ГΔ самерљива по дужини са датом рационалном дуж, биће самерљива и дуж ZК, ако је самерљива ВΔ, самерљива је и КЕ, ако није ниједна од ГΔ и ΔВ самерљива, неће бити ниједна ни од ZК и КЕ.

Према томе је ZЕ апотома, чије су рационале ZК и КЕ самерљиве са рационалама ГΔ и ΔВ биномијале, у истој су размери и истога реда као и ВГ. А то је требало доказати.

τὴν ΚΕ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ: ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει: ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει: ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ: εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ: εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ: εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ: εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ:

ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

[2] **V.Деф.9** Ако су три величине (непрекидно) пропорционалне, каже се да је размера прве величине према трећој *двапут виша* од размере прве величине према другој.

[3] **X.15** Ако се саберу две самерљиве величине биће и збир самерљив са сваком од њих, а ако је збир самерљив са једном од њих (са једним сабирком), биће и полазне величине (сабирци) самерљиве.

[4] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.

[5] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

[6] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

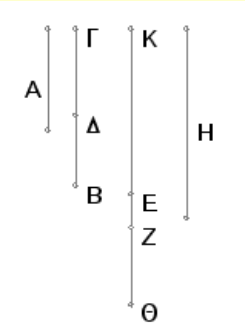
[7] **X.14** Ако су дате четири пропорционалне дужи и квадрат прве је већи од квадрата друге за квадрат дужи самерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи самерљиве по дужини са трећом. И ако је квадрат прве већи од квадрата друге за квадрат дужи несамерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи несамерљиве по дужини са трећом.

[8] **X.12** Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.

X. 113

Квадрат на рационалној дужи, конструисан на апотоми има за ширину биномијалу, чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој су размери, и тако добивена биномијала је истога реда као и апотома.

Нека је А рационална дуж, ВΔ - апотома, и квадрат на А нека је једнак правоугаонику са странама ВΔ и КΘ, тако да квадрат на рационалној дужи А, конструисан, као правоугаоник, на апотоми ВΔ има за ширину дуж КΘ.

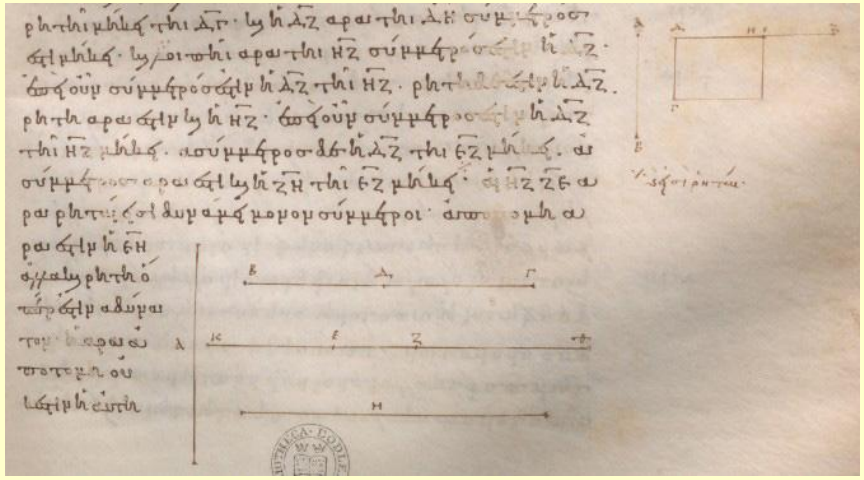


Тврдим, да је КΘ биномијала, чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме ВΔ и у истој размери и да је КΘ истога реда као и ВΔ.

Заиста, нека је ΔГ додатак за ВΔ. Тада су дужи ВГ и ГΔ рационалне и самерљиве само у степену [X.73][1]. И квадрат на А једнак је правоугаонику са странама ВГ и Н. А како је квадрат на А рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама ВГ и Н. И конструисан је на рационалној дужи ВГ. Због тога је рационалан и дуж Н и самерљива по дужини са ВГ [X.20][2]. Пошто је сад правоугаоник са странама ВГ и Н једнак правоугаонику са странама ВΔ и КΘ, постоји пропорција: ВГ је према ВΔ као КΘ према Н [VI.16][3]. Но ВГ је веће од ВΔ, ВΔ, па значи и КΘ је веће од Н [V.16[4], V.14[1]]. Узмимо КЕ једнако Н, значи КЕ је

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ:



λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ: αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον

---

[1] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.
[2] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.
[3] **VI.16** Ако су четири дужи пропорционалне, правоугаоник обухваћен крајњим (дужима) једнак је правоугаонику обухваћеном средњима (дужима); и ако је правоугаоник, обухваћен крајњим, једнак правоугаонику обухваћеном средњим, те четири дужи су пропорционалне.
[4] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.

самерљиво по дужини са ВГ. И пошто је ГВ према ВΔ као ΘК према КЕ, биће, после замене једног дела другим, ВГ према ГΔ као КΘ према ΘЕ [V.19.Последица][2]. Начинимо тако да КΘ буде према ΘЕ као ΘZ према ZЕ, па ће и остатак КZ бити према ZΘ као КΘ према ΘЕ, тј. као ВГ према ГΔ [V.19][3]. Но дужи ВГ и ГΔ самерљиво само у степену, па према томе и дужи КZ и ZΘ биће самерљиве само у степену [X.11][4]. И пошто је КΘ према ΘЕ као КZ према ZΘ, то је КZ према ZΘ као ΘZ према ZЕ [V.11][5]. А пошто је прво према трећем као квадрат на првом према квадрату на другом [V.Деф.9][6], то је и КZ према ZЕ као квадрат на КZ према квадрату на ZΘ. Но квадрат на КZ је самерљив са квадратом на ZΘ, јер су дужи КZ и ZΘ самерљиве у степену. Значи КZ и ZЕ су самерљиве по дужини [X.11], те је КZ самерљиво по дужини и са КЕ [X.15][7]. Но дуж КZ је рационалан и самерљива по дужини са ВГ [X.12][8]. И пошто је ВГ према ГΔ као КZ према ZΘ, биће, после пермутовања, ВГ према КZ као ΔГ према ZΘ [V.16][9]. Но ВГ је самерљиво са КZ, према томе и ZΘ је самерљиво по дужини са ГΔ [X.11]. Али ВГ, ГΔ су рационалне, самерљиве само у степену. Због тога су и дужи КZ и ZΘ рационалне, самерљиве само у степену [X.Деф.3][10]. Дуж КΘ је према томе биномијала [X.36][11].

Ако је сад квадрат на ВГ већи од квадрата на ГΔ за квадрат на дужи самерљивој са ВГ, биће и квадрат на КZ већи од квадрата на ZΘ за квадрат на дужи самерљивој са КZ [X.14][12]. И ако је ВГ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће самерљиво и КZ, а ако је ГΔ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће и ZΘ, а ако ниједна од ВГ и ГΔ није самерљива, неће бити самерљива ниједна од КZ и ZΘ.

А ако је вкадрат на ВГ, већи од квадрата на ГΔ за квадрат на дужи несамерљивој са ВГ, биће и квадрат на КZ већи од квадрата на ZΘ за квадрат на дужи

σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς Η. μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΒΔ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΕ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν [ὡς] ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι: καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ: ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ: αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι: σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει: ὥστε ἡ ΚΖ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ: σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ μήκει. αἱ ΒΓ, ΓΔ δὲ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ,

---

[1] **V.14** Ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања - мања.

[2] **V.19.Последица** Ако су пропорционалне величине узете заједно, онда важи и преврнута пропорција.

[3] **V.19** Ако је цело према целом, као умањилац према умањиоцу, онда је и остатак према остатку, као цело према целом.

[4] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

[5] **V.11** Две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом.

[6] **V.Деф.9** Ако су три величине (непрекидно) пропорционалне, каже се да је размера прве величине према трећој *двапут виша* од размере прве величине према другој.

[7] **X.15** Ако се саберу две самерљиве величине биће и збир самерљив са сваком од њих, а ако је збир самерљив са једном од њих (са једним сабирком), биће и полазне величине (сабирци) самерљиве.

[8] **X.12** Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.

[9] **V.16** Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.

[10] **X.Деф.3** Под таквим претпоставкама се доказује да за неку дату дуж постоји бескрајно много како самерљивих тако и несамерљивих дужи било само по дужини било и у степену. И тада ћемо звати дату дуж *рационалном*, а дужи самерљиве са њом како и по дужини и у степену, тако и само у степену *рационалним*, а несамерљиве са њом - *ирационалним*.

[11] **X.36** Ако се саберу две рационалне дужи, самерљиве само у степену, биће цела дуж ирационална: нека се зове биномијала.

[12] **X.14** Ако су дате четири пропорционалне дужи и квадрат прве је већи од квадрата друге за квадрат дужи самерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи самерљиве по дужини са трећом. И ако је квадрат прве већи од квадрата друге за квадрат дужи несамерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи несамерљиве по дужини са трећом.

несамерљивој са KZ [X.14]. И ако је ВГ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће самерљиво и KZ, а ако је ГΔ самерљиво, биће и ZΘ, а ако ниједна од ВГ и ГΔ није самерљива, неће бити ниједна ни од KZ и ZΘ.

На овај начин, KΘ је биномијала, чије су две рационале KZ и ZΘ самерљиве са рационалама ВГ и ГΔ апотоме и у истој размери са њима. И KΘ има исти ред са ВГ. А то је требало доказати.

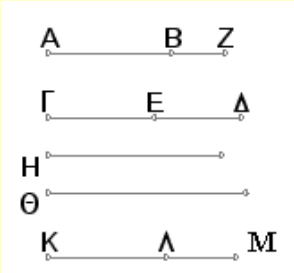
καὶ ἡ KZ τῆς ZΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ KZ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ZΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν KZ, ZΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ KΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ KZ, ZΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ KΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X. 114

Ако је површина (правоугаоника) обухваћена апотомом и биномијалом чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој размери, биће страна квадрата једнаког тој површини рационална.

Нека је површина (правоугаоника) са странама АВ и ГΔ обухваћена апотомом АВ и биномијалом ГΔ и нека је ГЕ већа рационала биномијале, нека су рационале ГЕ и ЕΔ биномијале самерљиве са рационалама АZ и ZВ апотоме и у истој размери са њима, и нека је Н страна квадрата једнаког правоугаонику са странама АВ и ГΔ.

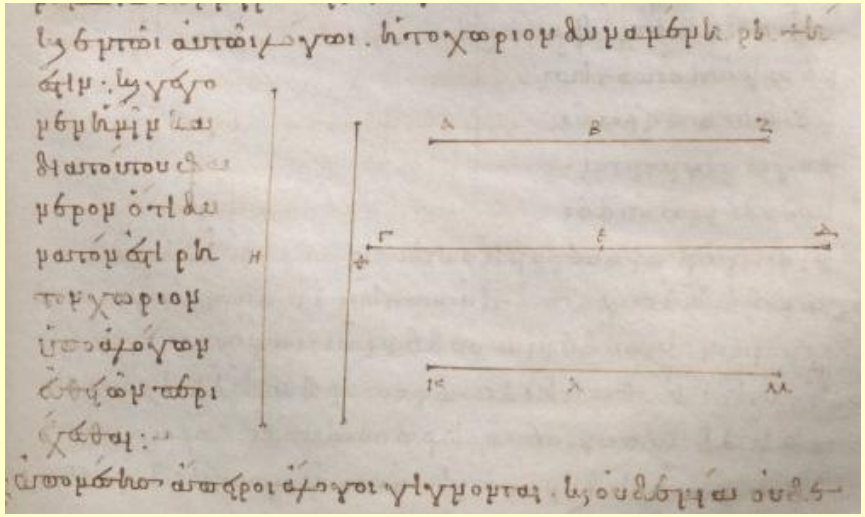


Тврдим да је дуж Н рационална.

Заиста, узмимо рационалну дуж Θ и конструишимо на ГΔ правоугаоник, једнак квадрату на Θ, коме је ширина КΛ. Према томе је КΛ апотома, чије су рационале КМ и МΛ самерљиве са рационалама ГЕ и ЕΔ биномијале и у истој размери са њима [X.112][1]. Према томе је АZ према ZВ као КМ према МΛ. И, после пермутовања, АZ је према КМ као ВZ према ΛМ. Значи и остатак АВ је према остатку КΛ као АZ према КМ [V.19][2]. Но АZ је самерљиво са КМ [X.12][3], па значи значи и АВ је самерљиво са КΛ [X.11][4]. И АВ је према КΛ као правоугаоник са странама ГΔ и АВ према правоугаонику са странама ГΔ и КΛ [VI.1[5]]. Значи и правоугаоник са странама ГΔ и АВ је самерљив са правоугаоником са странама ГΔ и КΛ [X.11]. Но правоугаоник са странама ГΔ и КΛ једнак је квадрату на Х. Због тога је правоугаоник са странама ГΔ и АБ самерљив са квадратом на Θ. Али

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η:



λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα

---

[1] **X.112** Квадрат на рационалној дужи, конструисан на биномијали има за ширину апотому, чије су рационале самерљиве са рационалама биномијале и у истој размери, и тако добивена апотома је истога реда као и биномијала.
[2] **V.19** Ако је цело према целом, као умањилац према умањиоцу, онда је и остатак према остатку, као цело према целом.
[3] **X.12** Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.
[4] **X.11** Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.
[5] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.

правоугаоник са странама ΓΔ и AB једнак је квадрату на H. Значи и квадрат на H је самерљив са квадратом на Θ. А како је квадрат на Θ рационалан, биће рационалан и квадрат на H. Значи рационална је и дуж H. И квадрат на њој је једнак правоугаонику са странама ΓΔ и AB.

На овај начин, ако је површина обухваћена апотомом и биномијалом чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој размери, биће страна квадрата једнаког тој површини рационална.

Последица

И услед тога постало нам је јасно да рационална површина може бити обухваћена ирационалним дужима. А то је требало доказати.

τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΛΜ: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Πόρισμα

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

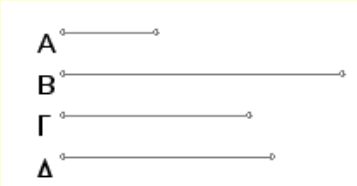
X. 115

Од медијале настаје бескрајно много ирационала и ниједна није иста ни са једном од претходних.

Нека је А медијала.

Тврдим, да од А настаје бескрајно много ирационала и ниједна од њих није иста ни са једном од претходних.

Узмимо рационалну дуж В и нека је правоугаоник са странама В и А једнак квадрату на Г.



Тада је дуж Г ирационална [X.Деф.4][1], јер је правоугаоник обухваћен ирационалном и рационалном дуж ирационалан [X.20][2]. И она није иста ни са једном од претходних. Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на некој од претходних, конструисан на рационалној дужи, нема за ширину медијалу. Затим, нека је правоугаоник са странама В и Г једнак квадрату на Δ. Тада је ирационалан квадрат на Δ [X.20]. А ирационална је и дуж Δ [X.Деф.4]. И она није иста ни са једном од претходних. Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на некој од претходних, конструисан на рационалној дужи, нема за ширину Г.

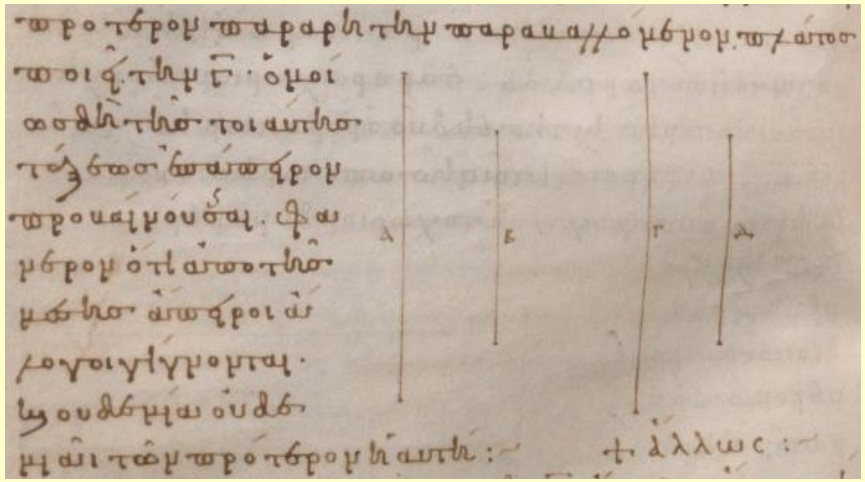
Јасно је да при продужењу сличног поступка до бесконачности, настају из медијале ирационале у бесконачној множини и ниједна није иста ни са једном од претходних. А то је требало доказати.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α:

λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ:



ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ: τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ: ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ: καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ.

ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

---

[1] **X.Деф.4** И зваћемо квадрат на датој дужи *рационалним* и са њим самерљиве површине *рационалним*, а несамерљиве - *ирационалним* и дужи на којима су ови квадрати - *ирационалним*, при чему, ако су то заиста квадрати, дужи су стране квадрата, а ако су то друге неке праволиниске слике, онда су то стране њима једнаких квадрата.

[2] **X.20** Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.