Е У К Л И Д О В И   Е Л Е М Е Н Т И

ПРИЛОЗИ ЗА НАСТАВУ У КОЈИМА СУ КОРИШЋЕНИ ЕЛЕКТРОНСКИ ЗАПИСИ ПРЕВОДА АКАДЕМИКА АНТОНА БИЛИМОВИЋА КОЈЕ ЈЕ ПРИРЕДИО ПРОФ. ДР ЗОРАН ЛУЧИЋ[1] И НАЈСТАРИЈЕ САЧУВАНЕ ГРЧКЕ ВЕРЗИЈЕ ЕЛЕМЕНАТА ПОЗНАТЕ И КАО E888[2]

“… Како о тој претставци, тако о свакој, у свих 13 књига Елемената налазимо садржај рашчлањен на шест делова. Једино уколико ће негде неки од тих делова бити непотребан моћи ће се изоставити, али први, пети и шести никад. ...“(Милош Радојчић **Општа математика** – Математика Египта, Месопотамије и Старе Грчке Математички факултет Београд, дигитално издање (хттп://www.матф.бг.ац.уу/наставно/злуциц/)).

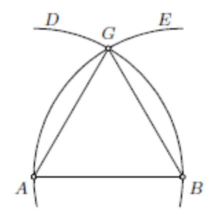
Затим се делови означавају и описују на следећи начин:

[1] Претпоставка исказивања става где се каже шта је дато, а шта се тражи (protasis)
[2] Излагање (експозиција), представљање одређеног лика, геометријске фигуре, обележеног одређеним словима (ekthesis)
[3] Одређивање (детерминација) онога што треба урадити са ликом изложеним у [2] (diorismos)
[4] Конструкција (грађење) којом треба доградити дати лик у сврху доказа (kataskeue)
[5] Доказ (apdeixis)
[6] Закључак (sumpersma)

И током рашчлањивања претставки по Проклусу у тексту који следи одговарајући делови ће се издвајати бојама онако како је у листи која непосредно претходи представљено.

Pretstavka 1.

[1] Na datoj duži sagraditi ravnostran trougao.
[2] Neka bude AB data duž.



Slika 21

[3] Treba sagraditi ravnostran trougao na duži AB (sl. 21).

[4] Iz središta A razmakom AB opišimo krug BGD (postulat 3) i, sem toga, iz središta B razmakom BA opišimo krug AGE i iz tačke G gde se krugovi uzajamno seku povucimo do A i B duži GA i GB (postulat 1).

[5] Kako je, naime, tačka A središte kruga BGD, duž AG je jednaka duži AB (definicija 15), zatim, kako je tačka B središte kruga AGE, duž BG je jednaka duži BA. Dokazano je pak da je duž GA jednaka duži AB, dakle, svaka od duži GA i GB jednaka je duži AB, no ono što je nečem jednako, jednako je među sobom (aksioma 1). Dakle, duž GA je jednaka duži GB, dakle, tri duži GA, AB, BG jednake su među sobom.

[6] Dakle, trougao ABG je ravnostran (definicija 24) i sagrađen na datoj duži AB, što je trebalo uraditi.

[1] http://www.matf.bg.ac.yu/nastavno/zlucic/
[2] http://www.claymath.org/library/historical/euclid/ (Целовит текст се сада чува у Bodleian бибилотеци, Oxford University)

У овом прилогу је дат упоредни текст на српском (Превод Антуна Билимовића) и грчком језику (Heiberg).

КЊИГА XIII

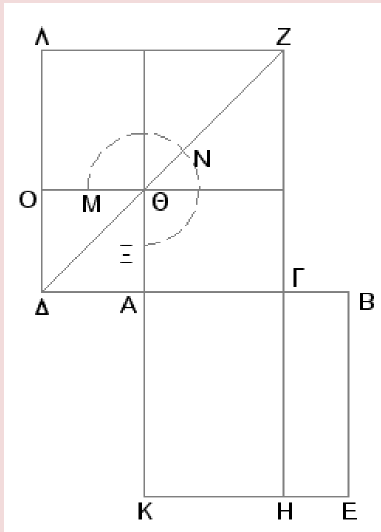
Пропозиције

1. Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.
2. Ако је квадрат на некој дужи пет пута већи од квадрата на једном њеном делу и удвостручени тај део подељен непрекидно, биће преостали део полазне дужи већи део.
Лема
А да је двоструко АГ веће од ВГ, овако се доказује.
3. Ако је нека дуж подељена непрекидно, биће квадрат збира мањег дела и половине већег дела пет пута већи од квадрата на половини већег дела.
4. Ако је дуж подељена непрекидно, биће збир квадрата на целој дужи и на мањем делу једнак троструком квадрату на већем делу.
5. Ако је нека дуж подељена непрекидно, па јој се дода већи део подељене дужи, биће и цела добивена дуж подељена непрекидно и њен већи део је полазна дуж.
6. Ако је рационална дуж подељена непрекидно, биће сваки од делова ирационалан, такозвана *апотома*.
7. Ако су код једнакостраног петоугла три угла, била узастопна или не, једнака међу собом, петоугао је једнакоугли.
8. Ако код једнакостраног и једнакоуглог петоугла две дужи спајају углове преко једног, оне деле једна другу непрекидно и њихови већи делови једнаки су страни петоугла.
9. Збир стране шестоугла и десетоугла, уписаних у исти круг, подељен је непрекидно и већи део је страна шестоугла.
10. Ако је у круг уписан једнакостран петоугао, биће квадрат стране петоугла једнак збиру квадрата стране шестоугла и стране десетоугла уписаних у исти круг.
11. Ако је у круг са рационалним пречником уписан једнакостран петоугао, његова страна је ирационална, такозвана ``*мања*''.
12. Ако је у круг уписан једнакостран троугао, квадрат на страни тог троугла је трипут већи од квадрата на полупречнику.
13. Конструисати пирамиду, обухватити је датом сфером, и доказати да је квадрат на пречнику сфере један и по пута већи од квадрата на ивици пирамиде.
Лема
Доказати да је АВ према ВГ као квадрат на АΔ према квадрату на ΔГ.
14. Конструисати октаедар, обухватити га сфером, као у предходном случају, и доказати да је квадрат на пречнику сфере двапут већи од квадрата на ивици октаедра.
15. Конструисати коцку, обухватити је сфером, као и пирамиду, и доказати да је квадрат на пречнику сфере трипут већи од квадрата на ивици коцке.
16. Конструисати икосаедар, обухватити га сфером, као и раније наведена тела, и доказати да је ивица икосаедра ирационална и то такозвана ``мања''.
Последица
Из овог је јасно да је квадрат на пречнику сфере пет пута већи од квадрата на полупречнику круга помоћу ког се описује икосаедар, и да је пречник сфере једнак збиру стране шестоугла и две стране десетоугла уписаних у тај круг. А то је требало доказати.
17. Конструисати додекаедар, обухватити га сфером, као и раније наведена тела (фигуре), и доказати да је ивица додекаедра ирационална, такозвана апотома.
Последица
Из овог је јасно, да је при непрекидној подели ивице коцке већи део ивица додекаедра. А то је требало доказати.
18. Одредити ивице пет проучених тела и упоредити их међу собом.
Лема
Да угао једнакостраног и једнакоуглог петоугла износи прав угао и петину правог, доказује се овако.

XIII. 1

Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.

Нека је дуж AB тачком Γ подељена непрекидно и нека је AΓ већи део; продужимо дуж ΓA преко A за дуж AΔ и нека је AΔ једнако половини AB.

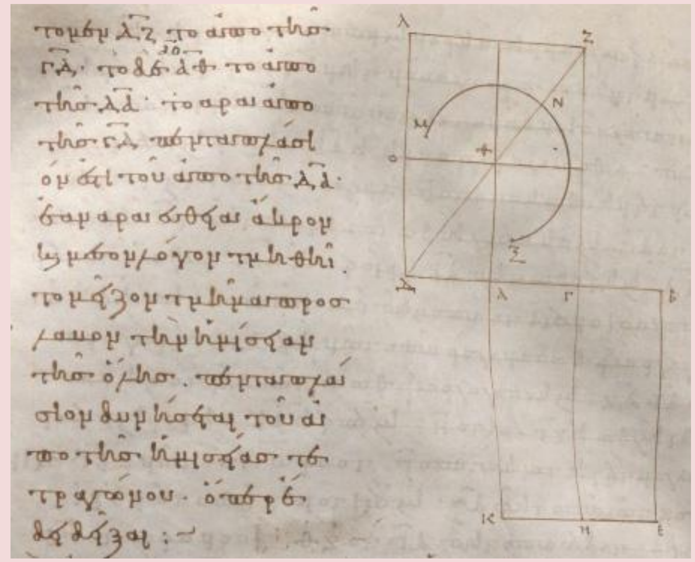


Тврдим да је квадрат на ΓΔ једнак петоструком квадрату на ΔA.

Заиста, конструишимо на AB и на ΔΓ квадрате AE и ΔZ и у ΔZ нацртајмо уобичајену слику и продужимо ZΓ до H. Пошто је AB тачком Γ подељено непрекидно, биће правоугаоник обухваћен од AB и BΓ једнак квадрату на AΓ [VI.Деф.3[1], VI.17[2]]. Но правоугаоник од AB и BΓ једнак је правоугаонику ΓE, а квадрат на AΓ једнак је квадрату ZΘ. Према томе је ΓE, једнако ZΘ. И пошто је BA двоструко AΔ, и BA једнако KA, а AΔ једнако AΘ, биће и KA двоструко AΘ. Али KA је према AΘ као ΓK према ΓΘ [VI.1][3], па је, значи, ΓK двоструко ΓΘ. Но и збир ΛΘ и ΘΓ је двоструко ΓΘ. А доказано је да је и ΓE једнако ΘZ. Према томе је

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ AΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓA εὐθεῖα ἡ AΔ, καὶ κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ AΔ:



λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB, ΔΓ τετράγωνα τὰ AE, ΔZ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZΓ ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ABΓ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AΓ τὸ ZΘ: ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ZΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ BA τῆς AΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῇ KA, ἡ δὲ AΔ τῇ AΘ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς AΘ.

[1] **VI.Деф.3** Каже се да је права (дуж) подељена у *крајњој и средњој размери (непрекидно)* ако цела права (дуж) стоји према већем делу као већи део према мањем.
[2] **VI.17** Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.
[3] **VI.1** Троуглии и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.

цео квадрат AE једнак гномону MNΞ. И пошто је BA удвостручено AΔ, биће квадрат на BA четвороструки квадрат на AΔ, тј. AE четвороструко ΔΘ. Али AE је једнако гномону MNΞ, па према томе је гномон MNΞ четвороструко AO. А цео ΔZ је петоструко AO. Но ΔZ је квадрат на ΔΓ, а AO на ΔA, па је стога квадрат на ΓΔ петоструки квадрат на ΔA.

На овај начин, ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини. А то је требало доказати.

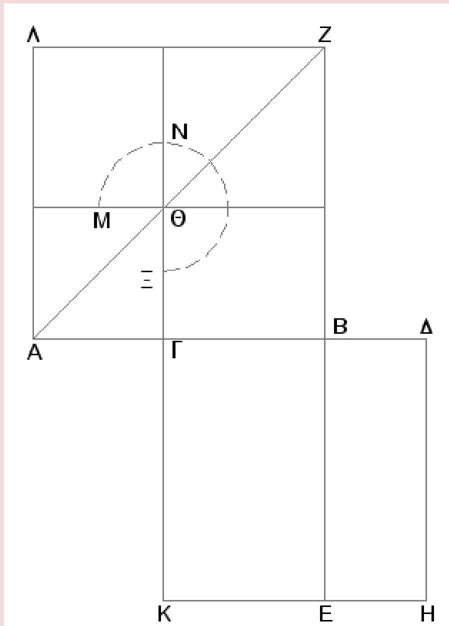
ὡς δὲ ἡ KA πρὸς τὴν AΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ: διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον: ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι: καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ: ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII. 2

Ако је квадрат на некој дужи пет пута већи од квадрата на једном њеном делу и удвостручени тај део подељен непрекидно, биће преостали део полазне дужи већи део.

Нека је квадрат на дужи AB пет пута већи од квадрата на AΓ и нека је удвостручено AΓ дуж ΓΔ.

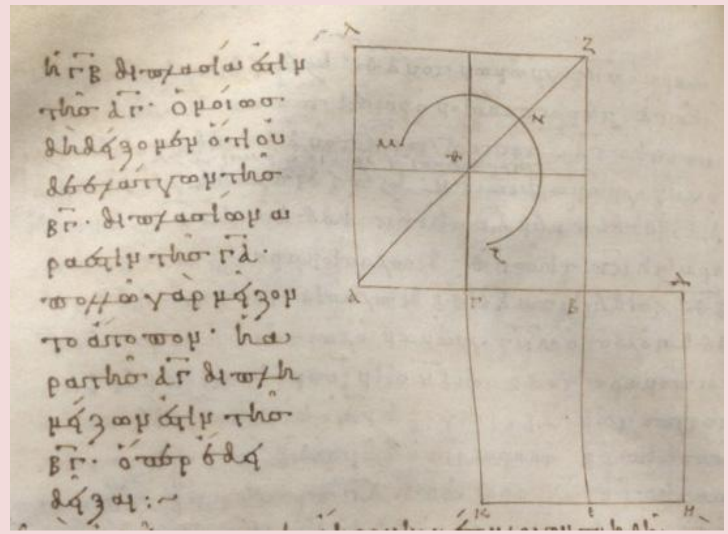


Тврдим да је ΓB већи део дужи ΓΔ подељене непрекидно.

Заиста, конструишимо на свакој од дужи AB и ΓΔ квадрате AZ и ΓH, у AZ нацртајмо уобичајену слику и продужимо BE. Пошто је квадрат на BA пет пута већи од квадрата на AΓ, биће AZ петоструко AΘ. Према томе је гномон MNΞ четвороструко AΘ. И пошто је ΔΓ двоструко ΓA, биће квадрат на ΔΓ четвороструки квадрат на ΓA, тј. ΓH од AΘ. А доказано је да је и гномон MNΞ четвороструко AΘ. Према томе је гномон MMΞ једнак ΓH. И пошто је ΔΓ

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τμήματος ἑαυτῆς τοῦ AΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ AΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ:



λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓB.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν AB, ΓΔ τετράγωνα τὰ AZ, ΓH, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ BE. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ AZ τοῦ AΘ. τετραπλάσιος ἄρα ὁ MNΞ γνώμων τοῦ AΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓA, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓA, τουτέστι τὸ ΓH τοῦ AΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ MNΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ AΘ: ἴσος ἄρα ὁ MNΞ γνώμων τῷ ΓH. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓA, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓK, ἡ δὲ AΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ KB τοῦ BΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘB τοῦ ΘB διπλάσια: ἴσον ἄρα τὸ KB τοῖς ΛΘ, ΘB. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ MNΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓH ἴσος: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘZ τῷ BH ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ двоструко ΓΑ, ΔΓ је једнако ΓΚ, а ΑΓ једнако ΓΘ (па према томе, и ΚΓ је удвостручено ΓΘ), биће и ΚΒ двоструко ΒΘ [VI.1][1]. Такође је и збир ΛΘ и ΘΒ једнак двоструком ΘΒ. Према томе је ΚΒ једнако збиру ΛΘ и ΘΒ. А доказано је да је и цео гномон ΜΝΞ једнак целом ΓΗ, те је и остатак ΘΖ једнак ΒΗ. Но правоугаоник ΒΗ је обухваћен дужима ΓΔ и ΔΒ, јер је ΓΔ једнако ΔΗ, а ΘΖ је квадрат на ΓΒ. Према томе је правоугаоник обухваћен од ΓΔ и ΔΒ једнак квадрату на ΓΒ. На тај начин је ΔΓ према ΓΒ као ΓΒ према ΒΔ. Међутим ΔΓ је веће од ΓΒ, а према томе и ΓΒ је веће од ΒΔ. Дакле ΓΒ је већи део дужи ΓΔ подељене непрекидно.

На овај начин, ако је квадрат на некој дужи пет пута већи од квадрата на једном њеном делу и удвостручени тај део је подељен непрекидно, биће преостали део полазне дужи већи део. А то је требало доказати.

Лема

А да је двоструко ΑΓ веће од ΒΓ, овако се доказује.

Заиста, ако то није тако, онда нека буде, ако је ово могуће, ΒΓ двоструко ΓΑ. Тада је квадрат на ΒΓ четири пута већи од квадрата на ΓΑ. А збир квадрата на ΒΓ и на ΓΑ је пет пута већи од квадрата на ΓΑ. Али се претпоставља да је квадрат на ΒΑ пет пута већи од квадрата на ΓΑ. Па према томе је квадрат на ΒΑ једнак збиру квадрата на ΒΓ и на ΓΑ. Но то је немогуће [II.4][2]. Значи ΓΒ није двоструко ΑΓ. Слично се доказује да и дуж мања од ΓΒ није двострука од дужи ΓΑ, јер је то још више бесмислено.

На овај начин, удвостручено ΑΓ је веће од ΓΒ. А то је требало доказати.

μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ: ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ: τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ: πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ: πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

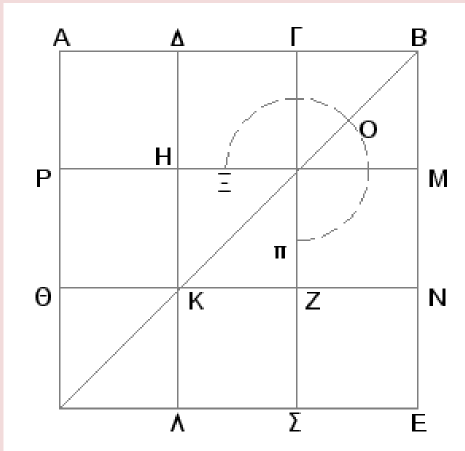
---

[1] **VI.1** Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.
[2] **II.4** Ако се дата дуж произвољно подели, квадрат на целој дужи једнак је збиру квадрата на отсечцима и двоструког правоугаоника обухваћена отсечцима.

XIII. 3

Ако је нека дуж подељена непрекидно, биће квадрат збира мањег дела и половине већег дела пет пута већи од квадрата на половини већег дела.

Нека је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно, и нека је већи део АГ, и АГ преполовљено тачком Δ.



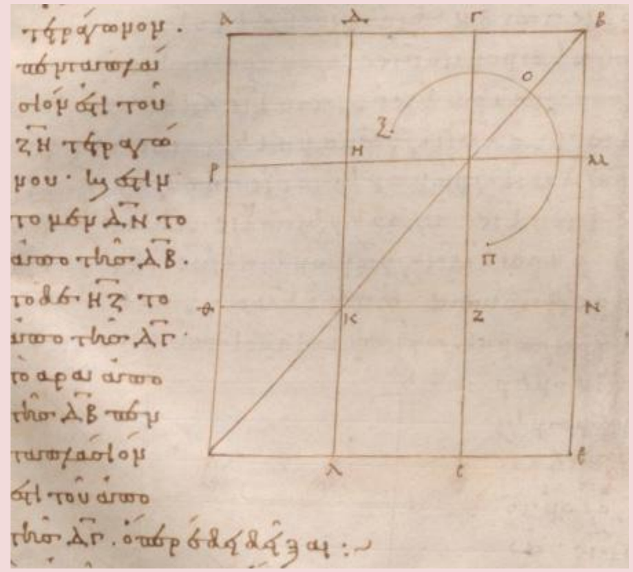
Тврдим да је квадрат на ВΔ пет пута већи од квадрата на ΔГ.

Заиста, конструишимо на АВ квадрат АЕ и нацртајмо двоструку слику. Пошто је АГ двоструко ΔГ, биће квадрат на АГ четири пута већи од квадрата на ΔГ, тј. РΣ од ZH. И пошто је правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ, а исти правоугаоник, обухваћен од АВ и ВГ, једнак и ГЕ, биће ГЕ једнако РΣ. Но РΣ је четвороструко ZH. Дакле, и ГЕ је четвороструко ZH. Даље, пошто је АΔ једнако ΔГ, биће и ΘК једнако КZ. Те према томе је и квадрат HZ једнак квадрату ΘΛ. А како је HК једнако КΛ, а и МN - NE, биће и МZ једнако ZE. Али МZ је једнако ГН, па према томе је и ГН једнако ZE. Додајмо им исто ГN; тада ће гномон ΞОП бити једнак ГЕ. Али већ је доказано да је ГЕ четвороструко HZ. И према томе је и гномон ΞОП четвороструки квадрат ZH. Значи, збир гномона ΞОП и квадрата ZH је петостуки квадрат ZH. Но збир гномона ΞОП и квадрат ZH је ΔN. А ΔN је квадрат на ΔВ, а HZ квадрат на ΔГ.

На овај начин квадрат на ΔВ је петоструки квадрат на ΔГ. А то је требало доказати.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ:



λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

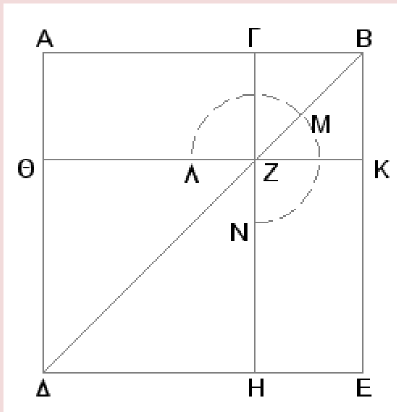
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ: τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ. ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ: ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον: καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ: ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ: καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου. ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ

	τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλὰ ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII. 4

Ако је дуж подељена непрекидно, биће збир квадрата на целој дужи и на мањем делу једнак троструком квадрату на већем делу.

Нека је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно и нека је АГ већи део.



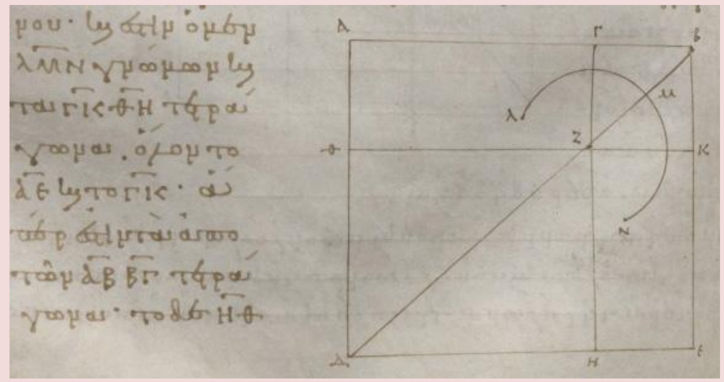
Тврдим да је збир квадрата на АВ и на ВГ трипут већи од квадрата на ГА.

Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔЕВ и нацртајмо слику. Пошто је сад АВ тачком Г подељено непрекидно и већи део је АГ, биће правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ [VI.Деф.3[1], VI.17[2]]. И пошто је АК правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ, а квадрат на АГ је ΘН, биће АК једнако ΘН. И пошто је АZ једнако ZЕ, додајмо им исто ГК. Тада је цело АК једнако целом ГЕ, па је према томе збир АК и ГЕ двоструко АК. Али збир АК и ГЕ је збир гномона ΛMN и квадрата ГК. Према томе је збир гномона ΛMN и квадрата ГК двоструко АК. Али већ је доказано да је АК једнако и ΘН. Према томе, гномон ΛMN и [квадрат ГК су двапут већи од квадрата ΘН и значи гномон ΛMN и] квадрати ГК и ΘН трипут су већи од квадрата ΘН. Но гномон ΛMN и квадрат ГК и ΘН чине цео квадрат АЕ и квадрат ГК, а то су квадрати на АВ и на ВГ, док је НΘ квадрат на АГ.

На овај начин је збир квадрата на АВ и на ВГ једнак троструком квадрату на АГ. А то је требало доказати.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ:



λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ: ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον: τὰ ἄρα ΑΚ, ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον: ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον: ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ [τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ: ὥστε ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ] τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον.

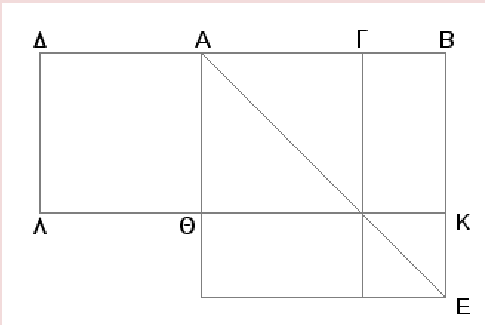
[1] **VI.Деф.3** Каже се да је права (дуж) подељена у *крајњој и средњој размери (непрекидно)* ако цела права (дуж) стоји према већем делу као већи део према мањем.
[2] **VI.17** Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.

	τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII. 5

Ако је нека дуж подељена непрекидно, па јој се дода већи део подељене дужи, биће и цела добивена дуж подељена непрекидно и њен већи део је полазна дуж.

Нека је дуж AB подељена тачком Γ непрекидно и нека је већи део AΓ. Одмеримо AΔ једнако AΓ.



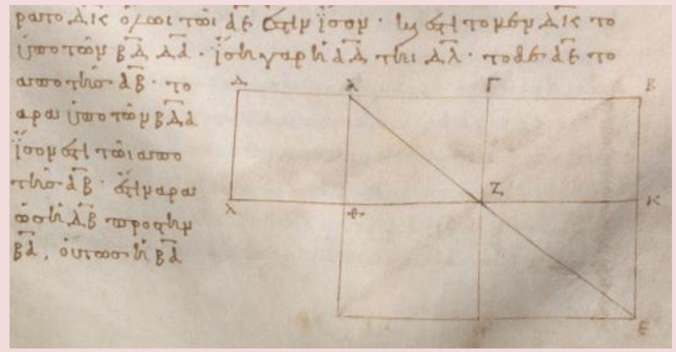
Тврдим да се дуж ΔB дели тачком A непрекидно и да је већи део полазна дуж AB.

Заиста, конструишимо на AB квадрат AE и нацртајмо слику. Пошто је AB подељено тачком Γ непрекидно, биће правоугаоник обухваћен од AB и BΓ једнак квадрату од AΓ [VI.Деф.3[1], VI.17[2]]. Али правоугаоник обухваћен од AB и BΓ је ΓE, а квадрат на AΓ је ΓΘ. Према томе је ΓE једнако ΘΓ. Но ΓE је једнако ΘE, а ΘΓ - ΔΘ. На тај начин ΔΘ је једнако ΘE [а додајемо исто ΘB]. Према томе је цело ΔK једнако целом AE. Но ΔK је правоугаоник обухваћен од BΔ и ΔA једнак квадрату на AB. А отуда следује да је ΔB према BA као BA према AΔ [VI.17]. Како је ΔB веће од BA, биће и BA веће од AΔ [V.14][3].

На тај начин тачка A дели ΔB непрекидно и већи део је AB. А то је требало доказати.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ AΓ, καὶ τῇ AΓ ἴση [κείσθω] ἡ AΔ.



λέγω, ὅτι ἡ ΔB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ AB.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ABΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ABΓ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AΓ τὸ ΓΘ: ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τὸ ΘE, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ: καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘB]. ὅλον ἄρα τὸ ΔK ὅλῳ τῷ AE ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔA: ἴση γὰρ ἡ AΔ τῇ ΔΛ: τὸ δὲ AE τὸ ἀπὸ τῆς AB: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BΔA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AΔ. μείζων δὲ ἡ ΔB τῆς BA: μείζων ἄρα καὶ ἡ BA τῆς AΔ.

Ἡ ἄρα ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ AB: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **VI.Деф.3** Каже се да је права (дуж) подељена у *крајњој и средњој размери (непрекидно)* ако цела права (дуж) стоји према већем делу као већи део према мањем.
[2] **VI.17** Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.
[3] **V.14** Ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања - мања.

XIII. 6

Ако је рационална дуж подељена непрекидно, биће сваки од делова ирационалан, такозвана *апотома*.

Нека је АВ рационална дуж подељена тачком Г непрекидно и нека је АГ већи део.

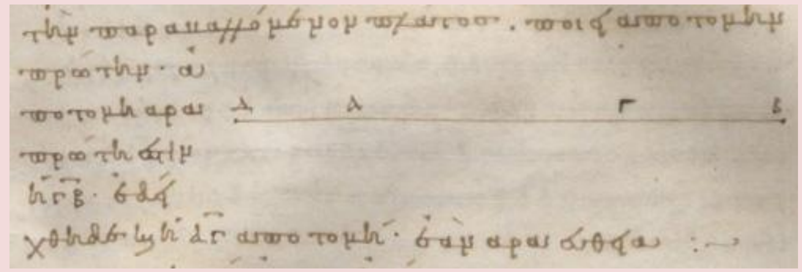
Тврдим да је свака од АГ и ГВ ирационална, такозвана апотома.

Заиста, продужимо ВА и одмеримо АΔ као половину ВА. Пошто је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно и већем одсечку АГ додата дуж АΔ једнака половини АВ, биће квадрат на ГΔ пет пута већи од квадрата на ΔА [XIII.1][1]. Према томе квадрат на ГΔ се односи према квадрату на ΔА као број према броју. Значи квадрат на ГΔ је самерљив са квадратом на ΔА [X.6][2]. Но квадрат на ΔА је рационалан, јер је рационално ΔА као половина рационалне дужи АВ. Те према томе је рационалан и квадрат на ГΔ [X.Деф.4][3]; значи рационално је и ГΔ. И пошто квадрат на ГΔ према квадрату на ΔА није у размери квадратног броја према квадратном броју, биће ГΔ несамерљиво по дужини са ΔА [X.9][4]. Према томе су ГΔ и ΔА рационални али самерљиви само у степену. На овај начин АГ је апотома [X.73][5]. Даље, пошто је АВ подељено непрекидно и АГ је већи део, биће правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ [VI.Деф.3[6], VI.17[7]]. На На тај начин квадрат на апотоми АГ претворен је у правоугаоник са рационалном дужином АВ и ширином ВГ. Но квадрат на апотоми претворен у правоугаоник са рационалном дужином има за ширину прву апотому [X.97][8]. Према томе је ГВ прва апотома. А доказано је да је и ГА апотома.

На тај начин, ако је рационална дуж подељена непрекидно, биће сваки од делова

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ:



λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν: σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ: ῥητὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ: αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν.

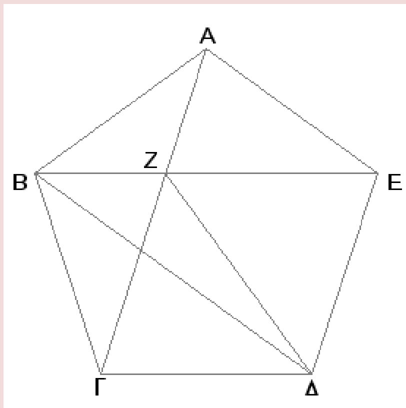
[1] **XIII.1** Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.
[2] **X.6** Ако су две величине у размери једна према другој као број према броју, оне су самерљиве.
[3] **X.Деф.4** И зваћемо квадрат на датој дужи *рационалним* и са њим самерљиве површине *рационалним*, а несамерљиве - *ирационалним* и дужи на којима су ови квадрати - *ирационалним*, при чему, ако су то заиста квадрати, дужи су стране квадрата, а ако су то друге неке праволиниске слике, онда су то стране њима једнаких квадрата.
[4] **X.9** Квадрати на самерљивим дужима се налазе у размери квадратног броја према квадратном броју. И квадрати који се налазе у размери квадратног броја према квадратном броју имају за стране самерљиве дужи. А квадрати на несамерљивим дужима се не налазе у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју. И квадрати који се не налазе у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју немају за стране самерљиве дужи.
[5] **X.73** Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.
[6] **VI.Деф.3** Каже се да је права (дуж) подељена у *крајњој и средњој размери (непрекидно)* ако цела права (дуж) стоји према већем делу као већи део према мањем.
[7] **VI.17** Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.
[8] **X.97** Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на апотоми, има за ширину прву апотому.

ирационалан, такозвана апотома. А то је требало доказати.	τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην: ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII. 7

Ако су код једнакостраног петоугла три угла, била узастопна или не, једнака међу собом, петоугао је једнакоугли.

Нека су, прво, три узастопна угла, A, B, Γ једнакостраног петоугла ABΓΔE једнака међу собом.

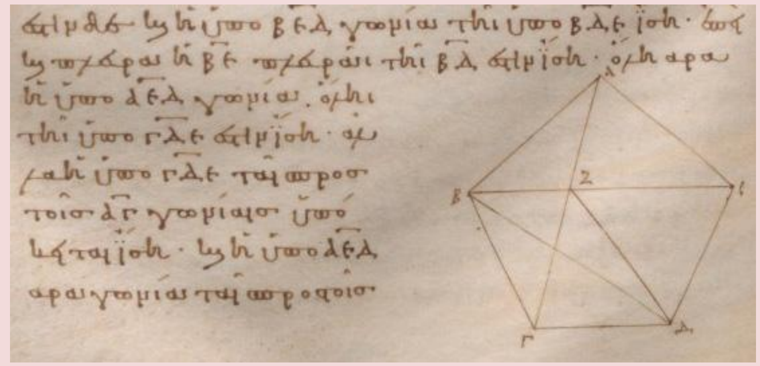


Тврдим да су сви углови петоугла ABΓΔE једнаки међу собом.

Заиста, нацртајмо спојнице AΓ, BE, ZΔ. Пошто су две стране ΓB и BA једнаке двема странама BA и AE, свака свакој, и угао ΓBA једнак углу BAE, биће и основица AΓ једнака основици BE, троугао ABΓ једнак троуглу ABE, и преостали углови једнаки преосталим угловим, који су спрам једнаких страна [I.4][1], наиме угао BΓA углу BEA, и угао ABE углу ΓAB, па ће стога и страна AZ бити једнака страни BZ [I.6][2]. А доказано је да је и цело AΓ једнако целом BE. Дакле, и остатак ZΓ једнак је остатку ZE. А и ΓΔ је једнако ΔE. Две стране ZΓ и ΓΔ једнаке су двема странама ZE и EΔ, а основица ZΔ је заједничка. Према томе је угао ZΓΔ једнак углу ZEΔ [I.8][3]. А доказано је да је и угао BΓA једнак углу AEB. Према томе је и цео угао BΓΔ једнак целом углу AEΔ. Али по претпоставци угао BΓΔ једнак је угловима код A и B, па је према томе и угао AEΔ једнак угловима код A

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ABΓΔE αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς A, B, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν:



λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ABΓΔE πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AΓ, BE, ZΔ.

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓB, BA δυσὶ ταῖς BA, AE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓBA γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BAE ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ AΓ βάσει τῇ BE ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ABE τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ BΓA τῇ ὑπὸ BEA, ἡ δὲ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ ΓAB: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ AZ πλευρᾷ τῇ BZ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ AΓ ὅλῃ τῇ BE ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ZΓ λοιπῇ τῇ ZE ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔE ἴση. δύο δὴ αἱ ZΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ZE, EΔ ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ZΔ: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ZΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZEΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BΓA τῇ ὑπὸ AEB ἴση: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ BΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ AEΔ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ BΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς A, B γωνίαις: καὶ ἡ ὑπὸ AEΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς A, B γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔE γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς A, B, Γ γωνίαις: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔE πεντάγωνον. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ'

---

[1] **I.4** Ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и ако су једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао мора бити једнак другом троуглу и остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они који леже спрам једнаких страна.
[2] **I.6** Ако су у троуглу међусобно једнака два угла, онда морају бити међусобно једнаке и стране које леже спрам једнаких углова.
[3] **I.8** Ако су у два троугла две стране једнаке двема одговарајућим странама другог, и основице им једнаке, морају бити једнаки и углови које образују једнаке стране.

и B. Слично се доказује да је и угао ΓΔΕ једнак угловима код A, B, Γ. На овај начин петоугао ΑΒΓΔ је једнакоугли.
Нека су сад једнаки не три узастопна угла, већ углови код тачака A, Γ, Δ. Тврдим да је и тада петоугао ΑΒΓΔΕ једнакоугли.
Заиста, нацртајмо ΒΔ. Пошто су две стране ΒΑ и ΑΕ једнаке двема странама ΒΓ и ΓΔ и обухватају једнаке углове, биће основица ΒΕ једнака основици ΒΔ, троугао ΑΒΕ једнак троуглу ΒΓΔ, и остали углови једнаки осталим угловима, који су спрам једнаких страна [I.4]. Према томе је угао ΑΕΒ једнак углу ΓΒΔ. А и угао ΒΕΔ једнак је углу ΒΔΕ, пошто је страна ΒΕ једнака страни ΒΔ [I.5][1]. На тај нчин је и цео угао ΑΕΔ једнак целом углу ΓΔΕ. Али угао ΓΔΕ, по претпоставци, једнак је угловима код A и код Γ, па је према томе и угао ΑΕΔ једнак угловима код A и код Γ. Из истих разлога и угао ΑΒΓ једнак је угловима код A, Γ и Δ.

На овај начин петоугао ΑΒΓΔΕ је једнакоугли. А то је требало доказати.

ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις: λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις.

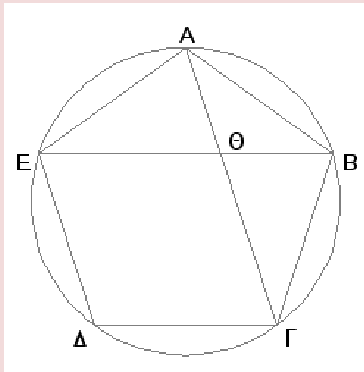
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **I.5** Код једнакокраких троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.

XIII. 8

Ако код једнакостраног и једнакоуглог петоугла две дужи спајају углове преко једног, оне деле једна другу непрекидно и њихови већи делови једнаки су страни петоугла.

Нека у једнакостраном и једнакоуглом петоуглу ΑΒΓΔΕ дужи ΑΓ и ΒΕ, које спајају из темена Α и Β углове преко једног, секу једна другу у тачки Θ.



Тврдим, да је свака од њих подељена тачком Θ непрекидно и да су њихови већи делови једнаки страни петоугла.

Заиста, опишимо око петоугла ΑΒΓΔΕ круг ΑΒΓΔΕ [IV.14][1]. Пошто су две дужи ΕΑ и ΑΒ једнаке двема дужима ΑΒ и ΒΓ и оне обухватају једнаке углове, биће и основица ΒΕ једнака основици ΑΓ, троугао ΑΒΕ једнак троуглу ΑΒΓ, и преостали углови једнаки преосталим угловима, сваки сваком, који су обухваћени једнаким странама [I.4][2]. Према томе је угао ΒΑΓ једнак углу ΑΒΕ. Значи, угао ΑΘΕ је удвостручени угао ΒΑΘ [I.32][3]. И угао ΕΑΓ је двапут већи од угла ΒΑΓ, јер је лук ΕΔΓ двапут већи од лука ΓΒ [III.28[4], VI.33[5]]. Према томе је угао ΘΑΕ једнак углу ΑΘΕ. Значи, и дуж ΘΕ једнака је ΑΕ, тј. једнака је и ΑΒ [I.6][6]. И пошто је дуж ΒΑ

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓ ΔΕ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον:

λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ: διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ

---

[1] **IV.14** Око датог петоугла, са једнаким странама и једнаким угловима описати круг.

[2] **I.4** Ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и ако су једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао мора бити једнак другом троуглу и остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они који леже спрам једнаких страна.

[3] **I.32** У сваком троуглу спољашњи угао образован продужењем једне стране једнак је двама несуседним унутрашњим угловима, а три унутрашња угла троугла једнаки су двама правим угловима.

[4] **III.28** У једнаким круговима једнаке тетиве отсецају једнаке лукове, већи једнак је већем, мањи-мањем.

[5] **VI.33** Код једнаких кругова углови се налазе у размери захваћених лукова било у случају централних било у случају периферијских углова.

[6] **I.6** Ако су у троуглу међусобно једнака два угла, онда морају бити међусобно једнаке и стране које леже спрам једнаких углова.

једнака дужи AE, биће и угао ABE једнак углу AEB [I.5][1]. Но доказано је да је угао ABE једнак углу BAΘ. Према томе је и угао BEA једнак углу BAΘ. И код два троугла ABE и ABΘ угао ABE је заједнички. Дакле, преостали угао BAE једнак је преосталом углу AΘB [I.32]. Према томе троуглови ABE и ABΘ имају једнаке углове. И на тај начин имамо пропорцију: EB је према BA као AB према BΘ [VI.4][2]. Но BA је једнако EΘ, значи, BE је према EΘ као EΘ према ΘB. Но BE је веће од EΘ, па ће и EΘ бити веће од ΘB [V.14][3].

На овај начин BE је подељено тачком Θ непрекидно и већи део ΘE је страна петоугла. Слично се доказује да је и AΓ тачком Θ подељено непрекидно и да је ΓΘ једнако страни петоугла. А то је требало доказати.

περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ: ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστιν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ: ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ.

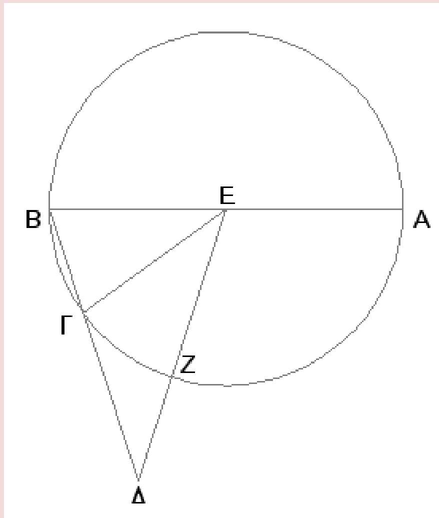
ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **I.5** Код једнакокраких троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.
[2] **VI. 4** Код троуглова са једнаким угловима су стране које образују једнаке углове пропорционалне, и одговарају једна другој оне стране што леже наспрам једнаких углова.
[3] **V.14** Ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања - мања.

XIII. 9

Збир стране шестоугла и десетоугла, уписаних у исти круг, подељен је непрекидно и већи део је страна шестоугла.

Нека је ΑΒΓ круг и од слика уписаних у круг ΑΒΓ нека је ΒΓ страна десетоугла, а ΓΔ - шестоугла и нека су надовезане на истој правој.

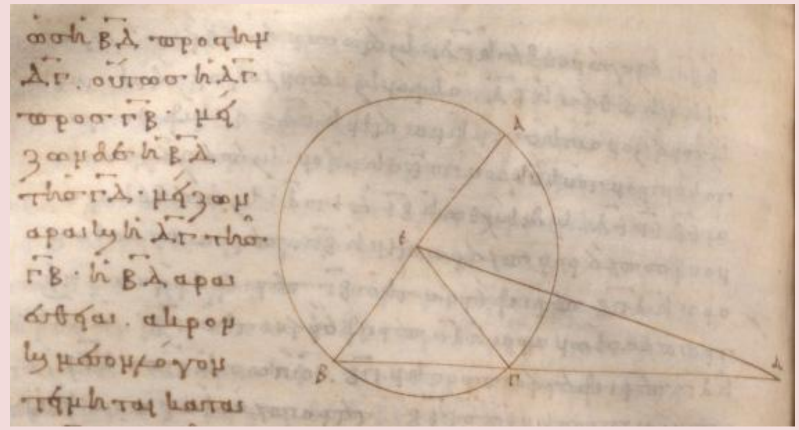


Тврдим да се цела ΒΔ дели непрекидно и да је већи део ΓΔ.

Заиста, узмимо за центар тачку Ε, повуцимо ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, и продужимо ΒΕ до Α. Пошто је ΒΓ страна једнакостраног десетоугла, лук ΑΓΒ је пет пута већи од лука ΒΓ. Према томе је лук ΑΓ четири пута већи од лука ΓΒ. И лук ΑΓ је према луку ΓΒ као угао ΑΕΓ према углу ΓΕΒ [VI.33][1]. Значи, и угао ΑΕΓ је четири пута већи од угла ΓΕΒ. И пошто је угао ΕΒΓ једнак углу ΕΓΒ [I.5][2], биће угао ΑΕΓ двапут већи од угла ΕΓΒ [I.32][3]. И пошто је дуж ΕΓ једнака дужи ΓΔ, јер је свака од њих једнака страни шестоугла уписаног у круг [IV.15.Последица][4], биће и угао ΓΕΔ

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας:



λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας: τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ: τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ: ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον [ἐγγραφομένου]: ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ:

[1] **VI.33** Код једнаких кругова углови се налазе у размери захваћених лукова било у случају централних било у случају периферијских углова.
[2] **I.5** Код једнакокраких троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.
[3] **I.32** У сваком троуглу спољашњи угао образован продужењем једне стране једнак је двама несуседним унутрашњим угловима, а три унутрашња угла троугла једнаки су двама правим угловима.
[4] **IV.15.Последица** Страна шестоугла једнака је правој из центра (полупречнику).

једнак углу ΓΔΕ [I.5], а угао ΓΕΒ двапут већи од угла ΕΔΓ [I.32]. А доказно је да је и угао ΑΕΓ двапут већи од угла ΕΓΒ, па према томе је угао ΑΕΓ четири пута већи од угла ΕΔΓ. Дакле, угао ΕΔΓ је једнак углу ΒΕΓ. Код два троугла ΒΕΓ и ΒΕΔ угао ΕΒΔ је заједнички. И преостали угао ΒΕΔ једнак је углу ΕΓΒ [I.32]. Према томе троуглови ΕΒΔ и ΕΒΓ имају једнаке углове. Значи, постоји пропорција: ΔΒ је према ΒΕ као ΕΒ пема ΒΓ [VI.4][1]. А ΕΒ је једнако ΓΔ. Према томе ΒΔ је према ΔΓ као ΔΓ према ΓΒ. И већа је дуж ΒΔ од ΔΓ, па је и ΔΓ веће од ΓΒ.

На тај начин дуж ΒΔ је подељена (тачком Γ) непрекидно и већи њен део је ΔΓ. А то је требало доказати.

διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ: τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ.

ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ Γ], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] **VI.4** Код троуглова са једнаким угловима су стране које образују једнаке углове пропорционалне, и одговарају једна другој оне стране што леже наспрам једнаких углова.