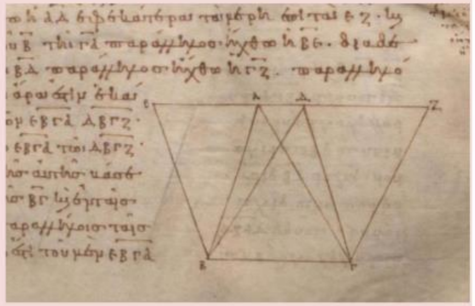
Геометрија

Извор: К. У. Шахно
Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

<ЈУЛА 2020>

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ:



λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ: καί εἰσιν ἴσα: ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ: καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον: ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει: τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον: ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ПРИПРЕМА ЗА ФАКУЛТЕТ

ПРИМЕР 258

Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

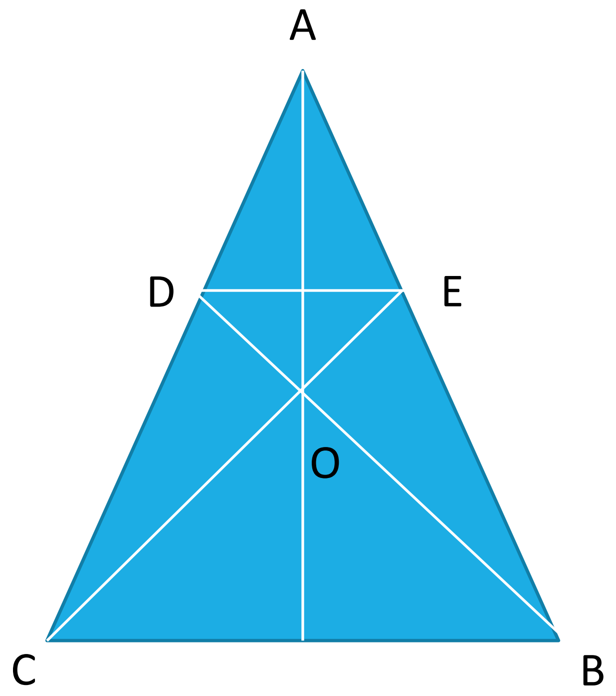
- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

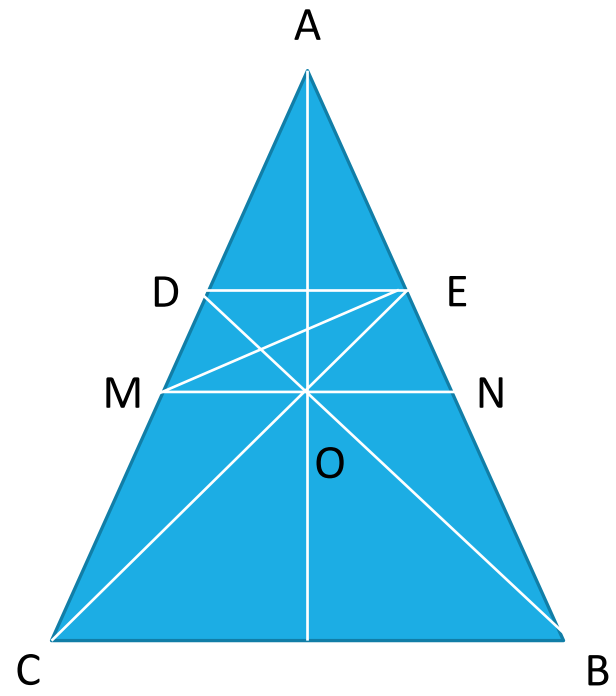


Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.



- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.

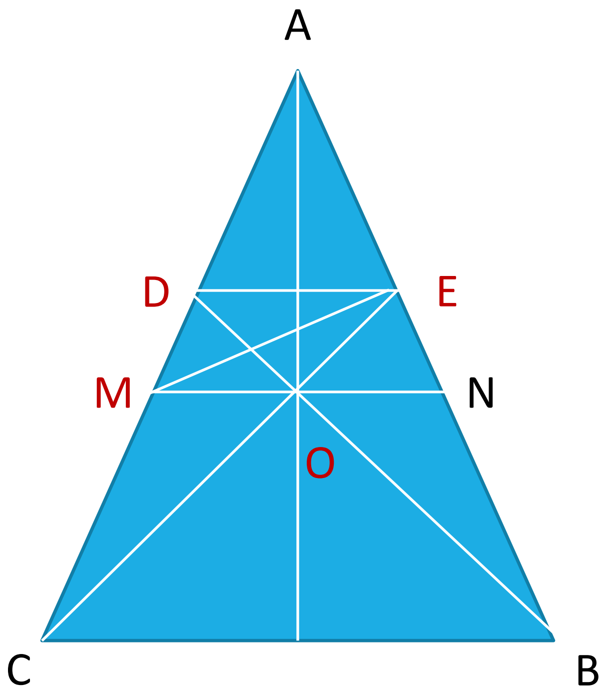
Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.

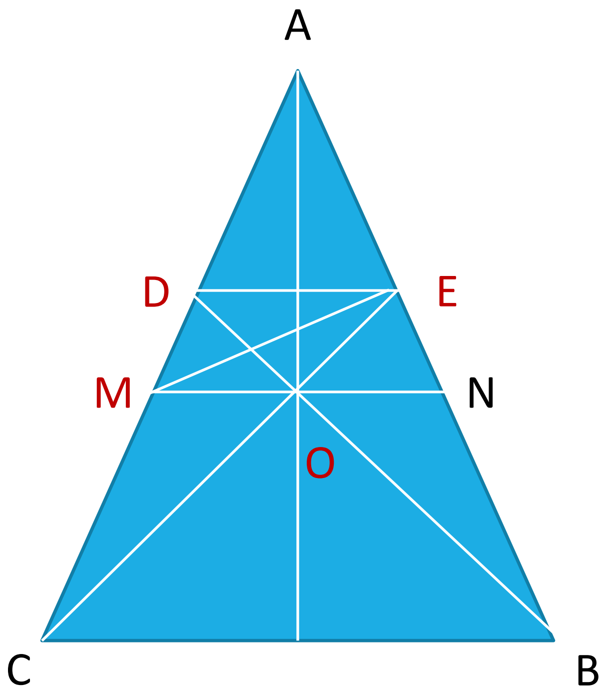


Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.



- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.

- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

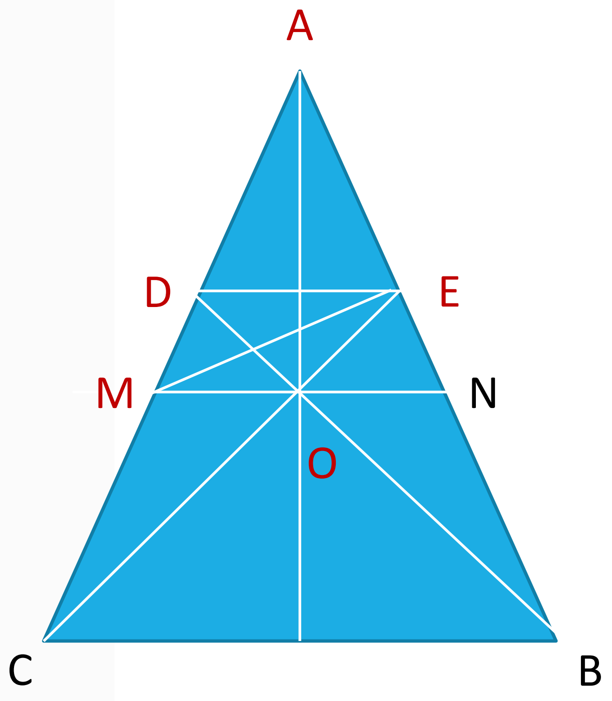
- Заједничка основица и једнаке висине.

Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.



- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.

- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

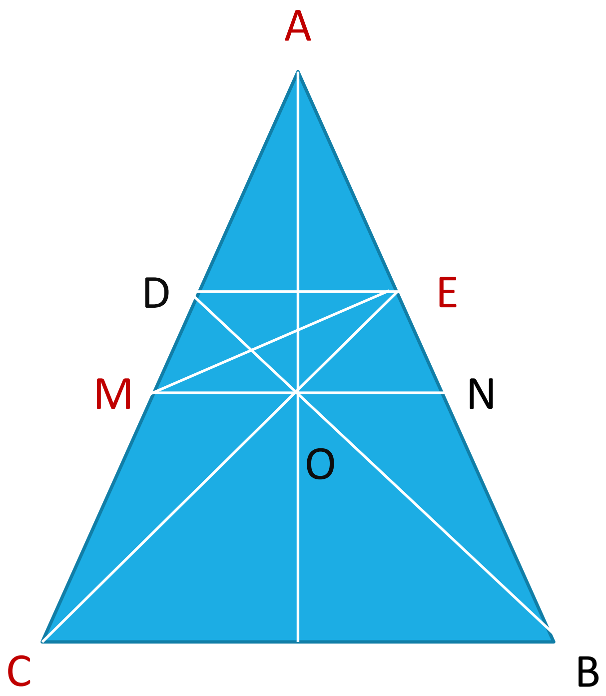
- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S_1

Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.



- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.
- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S_1
- P(ΔCME) = P(ΔMAE) = S_1

- CM = AM и заједничка висина из темена E.

Геометрија

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

ПРИМЕР 258

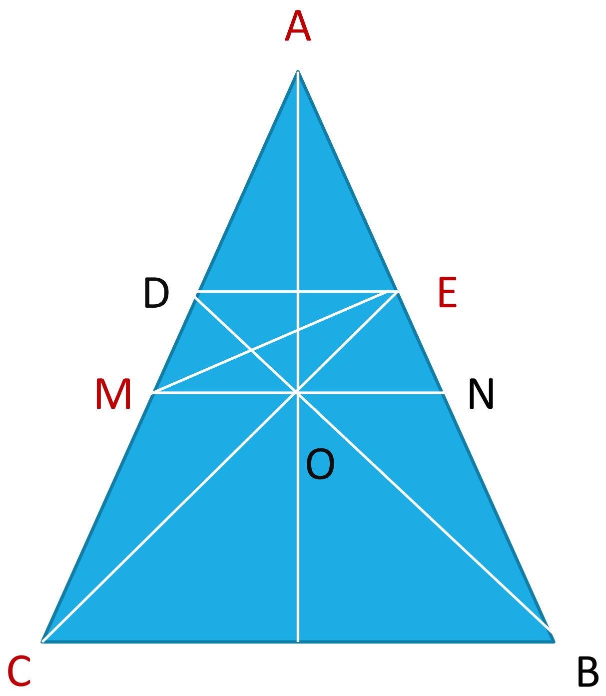
- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.
- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S_1
- P(ΔCME) = P(ΔMAE) = S_1

- CM = AM и заједничка висина из темена E.

- P(ΔACE) = $2S_1$
- P(ΔAOC) = $2S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$



Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

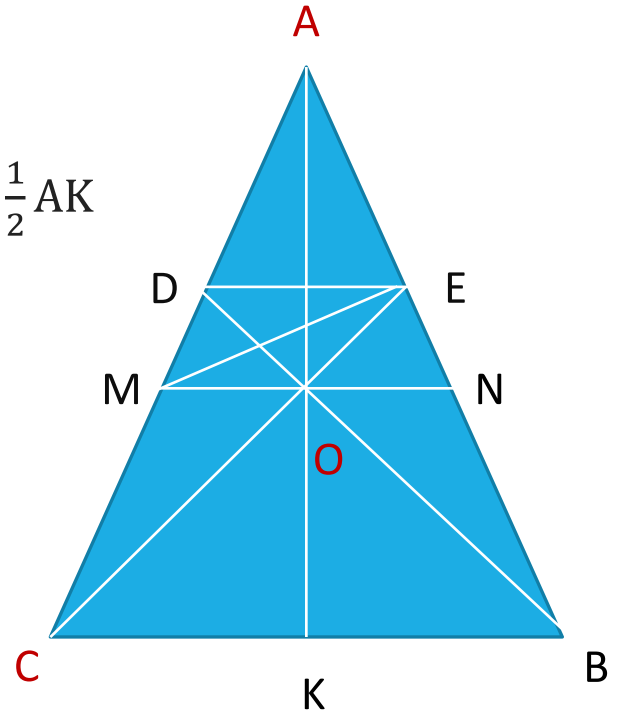
- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.
- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S_1
- P(ΔCME) = P(ΔMAE) = S_1

- CM = AM и заједничка висина из темена E.

- P(ΔACE) = $2S_1$
- P(ΔAOC) = $2S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$
- P(ΔAOC) = $\frac{1}{2}CK \cdot \mathrm{OA} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}CB \cdot \frac{1}{2}\mathrm{AK}$



Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.

- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

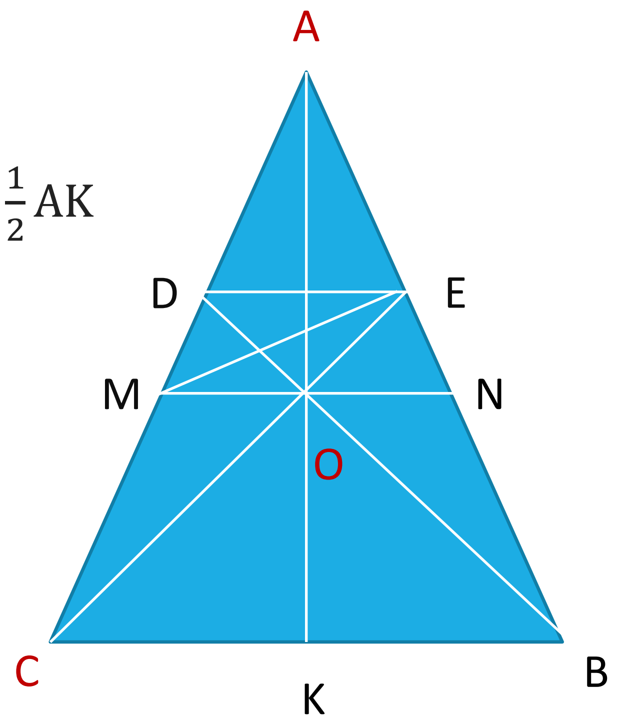
- Означимо са S1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.
- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S1
- P(ΔCME) = P(ΔMAE) = S1

- CM = AM и заједничка висина из темена E.

- P(ΔACE) = 2S1
- P(ΔAOC) = 2S1 $-\frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$
- P(ΔAOC) = $\frac{1}{2}CK \cdot \mathrm{OA} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}CB \cdot \frac{1}{2}\mathrm{AK}$
- P(ΔAOC) = $\frac{1}{4}S$



Геометрија

ПРИМЕР 258

- Праве одређене теменима B и C на основици једнакокраког троугла ABC и тачком O која је средиште висине из темена A секу бочне стране AC и AB троугла у тачкама D и E.
- Наћи површину четвороугла AEOD ако је површина троугла ABC једнака S.

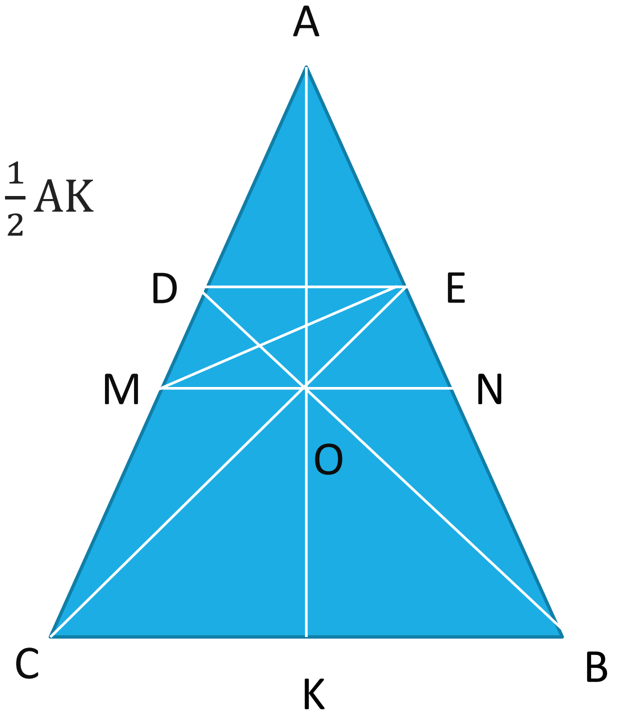
- Означимо са S_1 тражену површину четвороугла AEOD. Проведимо кроз тачку O праву MN || BC и означимо дуж EM.
- P(ΔDOE) = P(ΔDME)

- Заједничка основица и једнаке висине.

- P(ΔAEM) = P(□AEOD) = S_1
- P(ΔCME) = P(ΔMAE) = S_1

- CM = AM и заједничка висина из темена E.

- P(ΔACE) = $2S_1$
- P(ΔAOC) = $2S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$
- P(ΔAOC) = $\frac{1}{2}CK \cdot OA = \frac{1}{2}\frac{1}{2}CB \cdot \frac{1}{2}AK$
- P(ΔAOC) = $\frac{1}{4}S$
- $\frac{3}{2}S_1 = \frac{1}{4}S$
- $S_1 = \frac{1}{6}S$

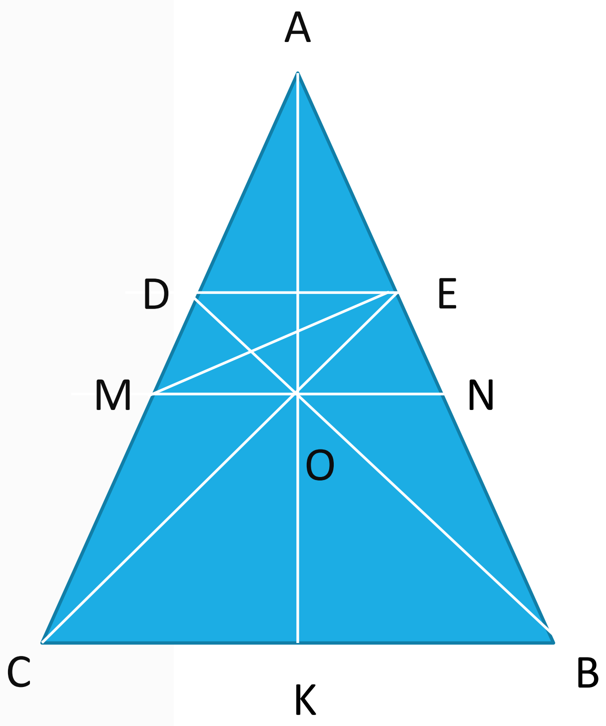


Геометрија

ПРИМЕР 258

Током решавања задатка углавном смо користили теорему о једнакости површина троуглова ако имају једнаке основице и висине.

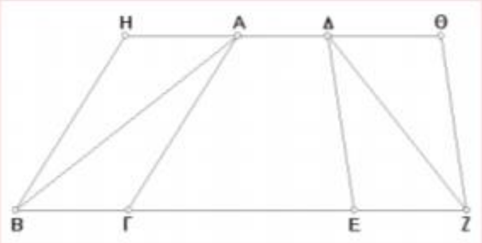
Зато следи приказ одговарајућих теорема из ЕУКЛИДОВИХ ЕЛЕМЕНАТА.



I 38

Троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.

Нека су ΑΒΓ, ΔΕΖ троуглови са једнаким основицама ΒΓ, ΕΖ и између истих паралелних ΒΖ, ΑΔ.



Тврдим да је троугао ΑΒΓ једнак троуглу ΔΕΖ.

Продужи се ΑΔ са сваке стране до Η и Θ и повуку се кроз Β права ΒΗ паралелна ΓΑ [I. 31][20] и кроз Ζ права ΖΘ паралелна ΔΕ. Тада су ΗΒΓΑ и ΔΕΖΘ паралелограми и ΗΒΓΑ једнак је ΔΕΖΘ, пошто су они са једнаким основицама ΒΓ, ΕΖ и између истих паралелних ΒΖ, ΗΘ [I. 36][21]; при томе је троугао ΑΒΓ половина паралелограма ΗΒΓΑ, јер га дијагонала ΑΒ полови [I. 34][22]. И троугао ΖΕΔ је половина паралелограма ΔΕΖΘ, јер га дијагонала ΔΖ полови. (А и половине од једнаког једнаке су међусобно [A. 6][23]). Према томе је троугао ΑΒΓ једнак троуглу ΔΕΖ.

На овај начин, троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом. А то је требало доказати.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ·

λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

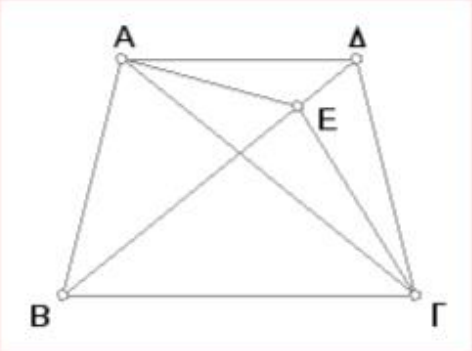
[20] **I. 31** Кроз дату тачку повући праву линију паралелну датој правој.
[21] **I. 36** Паралелограми са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.
[22] **I. 34** Код паралелограма су наспрамне стране и углови једнаки међусобно и дијагонала га полови.
[23] **Аксиома 6.** И половине од једнаких (објеката) једнаке су међусобно .

I 39

Једнаки троуглови са истом основицом и са исте њене стране леже између истих паралелних.

Нека су АВГ, ΔВГ једнаки троуглови са истом основицом ВГ и са исте њене стране. Тврдим да они леже између истих паралелних.

Повуче се АΔ. Тврдим да је АΔ паралелна ВГ.



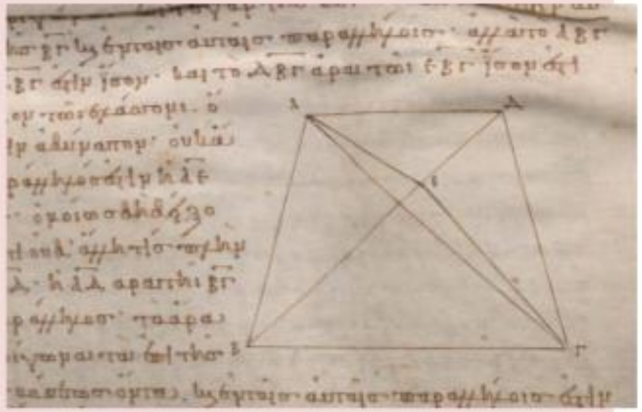
Ако није, нека се повуче кроз тачку А права АЕ паралелна са ВГ [I. 31][24], и нацрта ЕГ. Тада је троугао АВГ једнак троуглу ЕВГ, пошто су на истој основици ВГ и између истих паралелних [I. 37][25]. Али троугао АВГ једнак је троуглу ΔВГ, према томе је троугао ΔВГ једнак троуглу ЕВГ [А. 1][26], већи мањем. А то је немогуће. Права АЕ није према томе паралелна правој ВГ. Слично се може доказати да не постоји никаква друга паралелна права сем праве АΔ. Према томе је АΔ паралелна ВГ.

На овај начин, једнаки троуглови са истом основицом и са исте њене стране леже између истих паралелних. А то је требало доказати.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[24] **I. 31** Кроз дату тачку повући праву линију паралелну датој правој.
[25] **I. 37** Троуглови са истом основицом између истих паралелних једнаки су један другом.
[26] **Аксиома 1.** Они (објекти) који су једнаки истом (објекту) једнаки су међусобно.

I 40

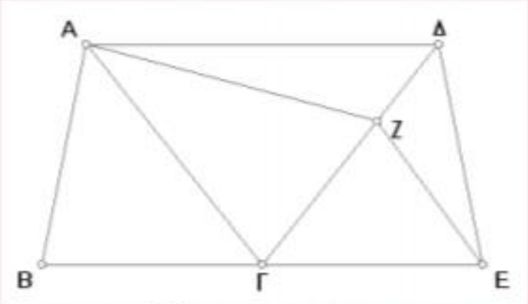
Једнаки троуглови са једнаким основицама са исте стране од њих леже између истих паралелних.

Нека су АВГ, ГΔЕ једнаки троуглови са једнаким основицама ВГ, ГЕ са исте стране ових.

Тврдим да они леже између истих паралелних.

Нека се споји А са Δ; тврдим, да је АΔ паралелно ВЕ.

Ако није, повуче се кроз тачку А права АZ паралелна ВЕ [I. 31][27] и нацрта се права ZЕ.



Тада је троугао АВГ једнак троуглу ZГЕ, јер су они са једнаким основицама ВГ, ГЕ и између истих паралелних ВЕ, АZ [I. 38][28]. Али троугао АВГ је једнак и троуглу ΔГЕ; и према томе троугао ΔГЕ био би једнак троуглу ZГЕ [А. 1][29]; већи мањем; а то је немогуће. Због тога АZ није паралелно са ВЕ. Слично се може доказати да не постоји никаква друга паралелна права сем АΔ. Према томе је АΔ паралелна ВЕ.

На тај овај начин, једнаки троуглови са једнаким основицама са исте стране ових леже између истих паралелних. А то је требало доказати.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ [τριγώνῳ]· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[27] **I. 31** Кроз дату тачку повући праву линију паралелну датој правој.
[28] **I. 38** Троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.
[29] **Аксиома 1.** Они (објекти) који су једнаки истом (објекту) једнаки су међусобно.

Наставак следи ...