

Геометрија

Извор: К. У. Шахно

Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

<ЈУЛА 2020>

ПРИПРЕМА ЗА ФАКУЛТЕТ

ПРИМЕР 260



Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла АВС угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

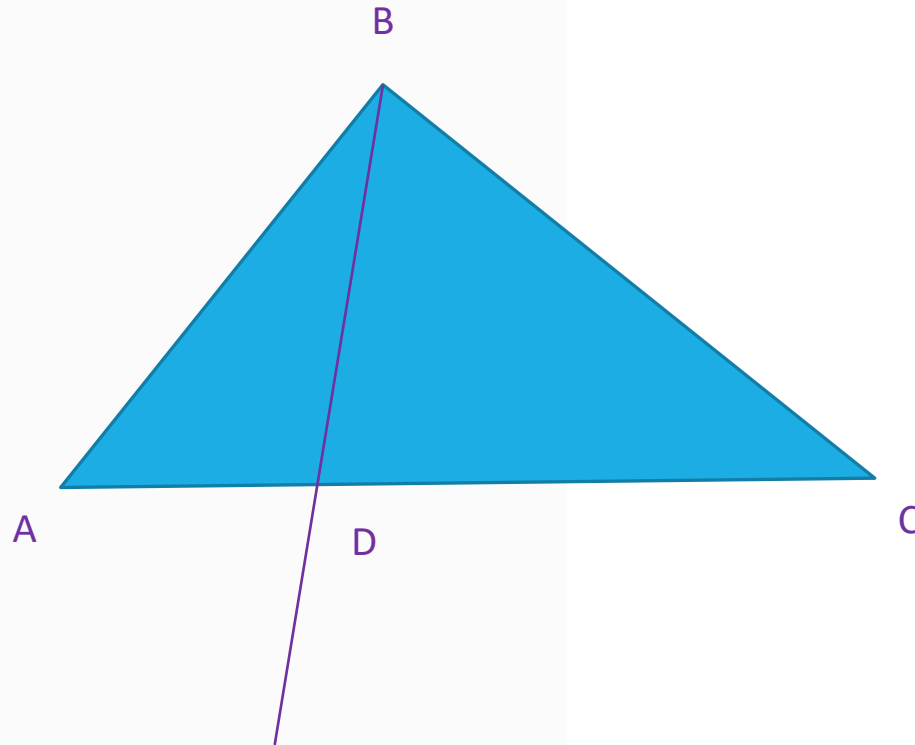
Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.

Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.

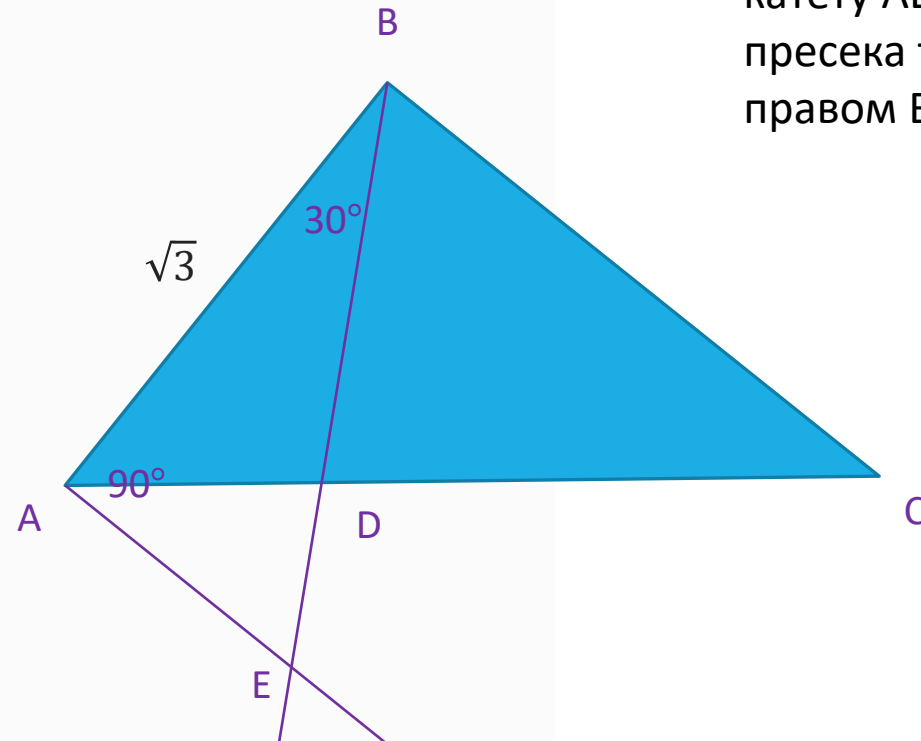


Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

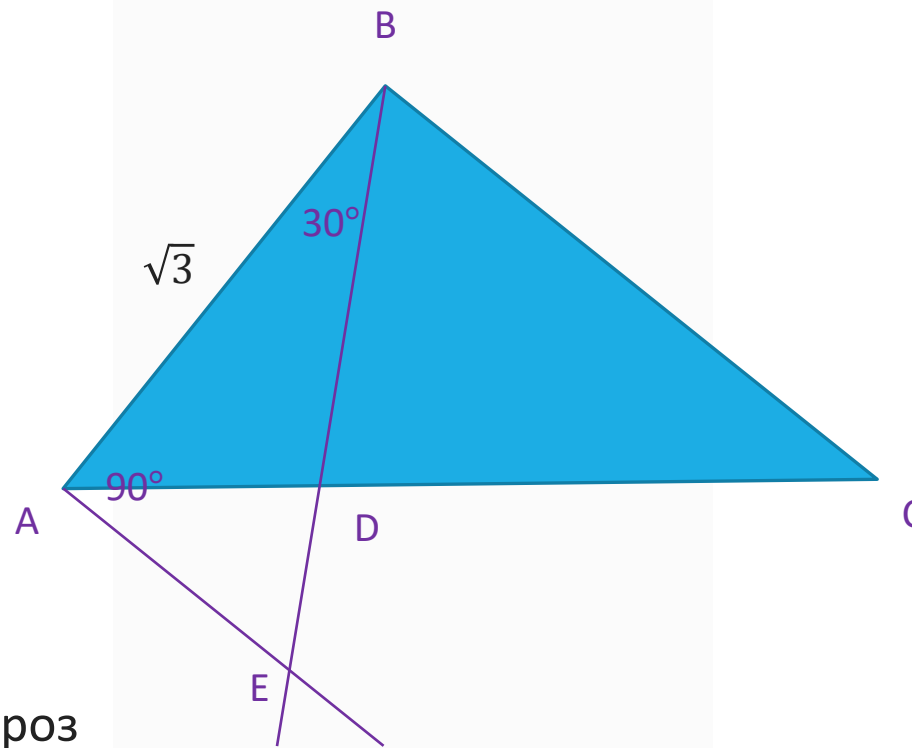
Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$.

Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Троуглови ADE и CDB су слични као троуглови који имају једнаке одговарајуће углове

Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$.

Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Троуглови ADE и CDB су слични као троуглови који имају једнаке одговарајуће углове

$$\text{Зато важи } \frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad \frac{BC}{1} = \frac{2}{1};$$

Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3, x^2 = 1, x = 1.$

Геометрија

ПРИМЕР 260

■ Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Троуглови ADE и CDB су слични као троуглови који имају једнаке одговарајуће углове

$$\text{Зато важи } \frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad \frac{BC}{1} = \frac{2}{1};$$

$$\frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad BC = 2,$$

Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3, x^2 = 1, x = 1.$

Геометрија

ПРИМЕР 260

■ Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Троуглови ADE и CDB су слични као троуглови који имају једнаке одговарајуће углове

$$\text{Зато важи } \frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad \frac{BC}{1} = \frac{2}{1};$$

$$\frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad BC = 2,$$

Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3, x^2 = 1, x = 1.$

Геометрија

ПРИМЕР 260

■ Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.



Троуглови ADE и CDB су слични као троуглови који имају једнаке одговарајуће углове

$$\text{Зато важи } \frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad \frac{BC}{1} = \frac{2}{1};$$

$$\frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}, \quad BC = 2,$$

$$AC = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

Нека права BD са мањом катетом АВ троугла ABC заклапа угао од 30° при чему тачка D лежи на хипотенузи AC.

Нацртајмо нормалу AE на катету АВ где је E тачка пресека те нормале са правом BD.

Када катета лежи наспрам угла од 30° она је једнака половини хипотенузе.

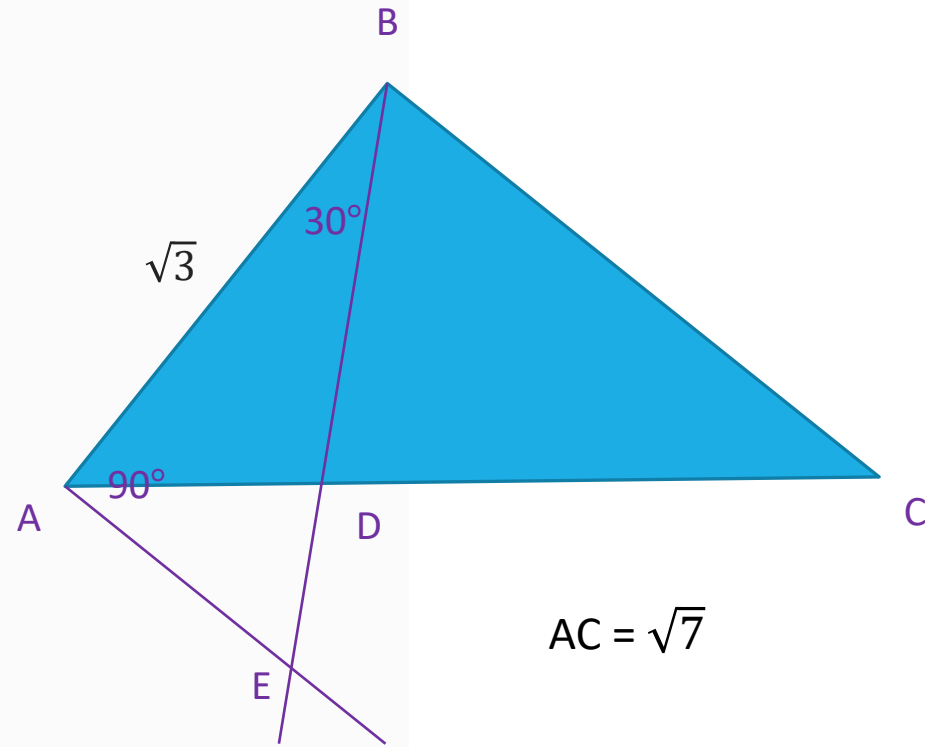
Тада, ако је $AE = x$, $BE = 2x$.
 $(2x)^2 = x^2 + 3, x^2 = 1, x = 1.$

Геометрија

ПРИМЕР 260

- Права која пролази кроз теме правог угла троугла образује са мањом катетом АВ троугла ABC угао од 30° и сече хипотенузу у тачки која је дели у односу 1:2.

Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете једнака $\sqrt{3}$.

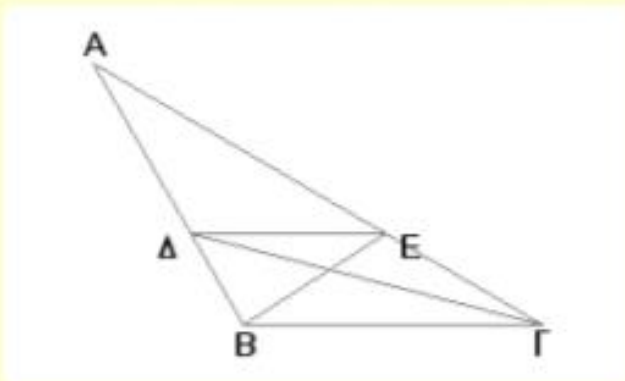


Одговарајући прилог из ЕЕ

Ако је у троуглу повучена нека права паралелна једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла.

Заиста, нека је у троуглу $AB\Gamma$ повучена права ΔE паралелно $B\Gamma$, једној од страна троугла.

Тврдим да је $B\Delta$ према ΔA као ΓE према $E A$.
Повуку се BE , $\Gamma \Delta$.



Троугао $B\Delta E$ је једнак троуглу $\Gamma \Delta E$ јер они имају исте основице ΔE и између истих су паралелних ΔE , $B\Gamma$ [I. 38]¹. А троугао $A\Delta E$ је нешто друго. Како су сад једнаке величине према истој величини у истој размери [V. 7]², и троугао $B\Delta E$ је према троуглу $A\Delta E$ као троугао $\Gamma \Delta E$ према троуглу $A\Delta E$.

Али троугао $B\Delta E$ је према троуглу $A\Delta E$ као $B\Delta$ према ΔA , пошто имају исту висину, нормалу спуштену из E на AB , и односе се као основице [VI. 1]¹. Из истих разлога троугао $\Gamma \Delta E$ је према троуглу $A\Delta E$ као ΓE према $E A$.

И тако је $B\Delta$ према ΔA , као што је ΓE према $E A$ [V. 11]².

Нека су сад стране AB и $A\Gamma$ троугла $AB\Gamma$ пресечене пропорционално, тј. да је $B\Delta$ према ΔA као ΓE према $E A$, и нека је повучено ΔE .

Тврдим да је права ΔE паралелна правој $B\Gamma$.

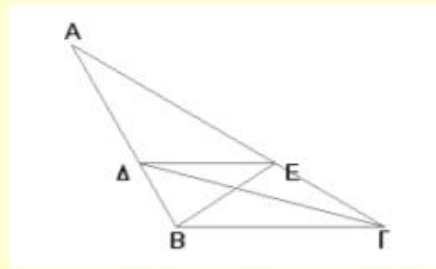
Заиста, на основу исте конструкције, пошто је $B\Delta$ према ΔA као ΓE према $E A$, а $B\Delta$ према ΔA као што троугао $B\Delta E$ према троуглу $A\Delta E$, и ΓE је према $E A$ као троугао $\Gamma \Delta E$ према троуглу $A\Delta E$ [VI. 1], закључујемо да је троугао $B\Delta E$ према троуглу $A\Delta E$ као троугао $\Gamma \Delta E$ према троуглу $A\Delta E$ [V. 11]. Према томе сваки од троуглова $B\Delta E$ и $\Gamma \Delta E$ је у истој размери према $A\Delta E$. Значи, дакле, троугао $B\Delta E$ једнак је троуглу $\Gamma \Delta E$ [V. 9]³. А при томе имају исту основицу ΔE . Како једнаки троуглови са истом основицом леже између истих паралелних [I. 39]⁴, закључујемо да је ΔE паралелно $B\Gamma$.

На овај начин, ако је у троуглу повучена нека права паралелна једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла. А то је требало доказати.

Ако је у троуглу повучена нека права паралелна једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла.

Занста, нека је у троуглу АВГ повучена права ДЕ паралелно ВГ, једној од страна троугла.

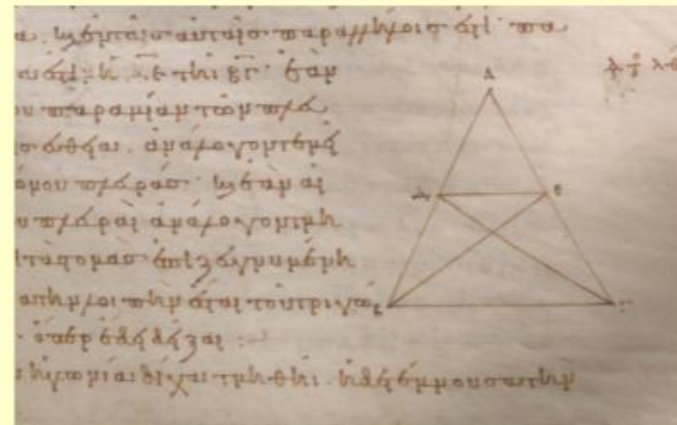
Тврдим да је ВД према ΔΑ као ΓΕ према ΕΑ.
Повуку се ВЕ, ΓΔ.



Троугао ВДЕ је једнак троуглу ΓΔΕ јер они имају исте основице ΔΕ и између истих су паралелних ΔΕ, ВГ [I. 38]¹. А троугао АΔΕ је нешто друго. Како су сад једнаке величине према истој величини у истој размери [V. 7]², и троугао ВΔΕ је према троуглу АΔΕ као троугао ΓΔΕ према троуглу АΔΕ.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῆ τις εὐθεΐα, ἀνάλογον τεμῆ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς: καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρᾶν.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μὲ τῶν πλευρῶν τῆ ΒΓ ἦχθῃ ἡ ΔΕ:
λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.
Ἐπιζεύξωσαν γάρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.



Ἴσον ὄρα ἐστὶ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ: ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ: ἄλλο δὲ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ

¹ I. 38 Троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.

² V. 7 Једнаке величине су према истој величини у истој размери и иста величина је према једнаким величинама у истој размери.

ΕΥΚΛΙΔОВИ ΕΛΕΜΕΝΤΗ

ШЕСТА ΚΒΗΓΑ

Али троугао ВΔΕ је према троуглу АΔΕ као ВΔ према ΔА, пошто имају исту висину, нормалу спуштену из Е на АВ, и односе се као основице [VI.1]¹. Из истих разлога троугао ГΔΕ је према троуглу АΔΕ као ΓЕ према ЕА.

И тако је ВΔ према ΔА, као што је ΓЕ према ЕА [V.11]².

Нека су сад стране АВ и АГ троугла АВГ пресечене пропорционално, тј. да је ВΔ према ΔА као ΓЕ према ЕА, и нека је повучено ΔЕ.

Тврдим да је права ΔЕ паралелна правој ВГ.

Заиста, на основу исте конструкције, пошто је ВΔ према ΔА као ΓЕ према ЕА, а ВΔ према ΔА као што троугао ВΔΕ према троуглу АΔΕ, и ΓЕ је према ЕА као троугао ГΔΕ према троуглу АΔΕ [VI.1], закључујемо да је троугао ВΔΕ према троуглу АΔΕ као троугао ГΔΕ према троуглу АΔΕ [V.11]. Према томе сваки од троуглова ВΔΕ и ГΔΕ је у истој размери према АΔΕ. Значи, дакле, троугао ВΔΕ једнак је троуглу ГΔΕ [V.9]³. А при томе имају исту основицу ΔЕ. Како једнаки троуглови са истом основицом леже између истих паралелних [I.39]⁴, закључујемо да је ΔЕ паралелно ВГ.

На овај начин, ако је у троуглу повучена нека права паралелна једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла. А то је требало доказати.

αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἔστιν ὅρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ: ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν АВ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἀλλήλα εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἢ ΓЕ πρὸς τὴν ΕΑ:

καὶ ὡς ὅρα ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓЕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ АВГ τριγώνου πλευраὶ αἱ АВ, АГ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓЕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΔΕ: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἢ ΔΕ τῇ ВГ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓЕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἢ ΓЕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ὅρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἐκότερον ὅρα τῶν ΒΔΕ, ГΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ὅρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ГΔΕ τριγώνῳ: καὶ εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ὅρα ἐστὶν ἢ ΔΕ τῇ ВГ.

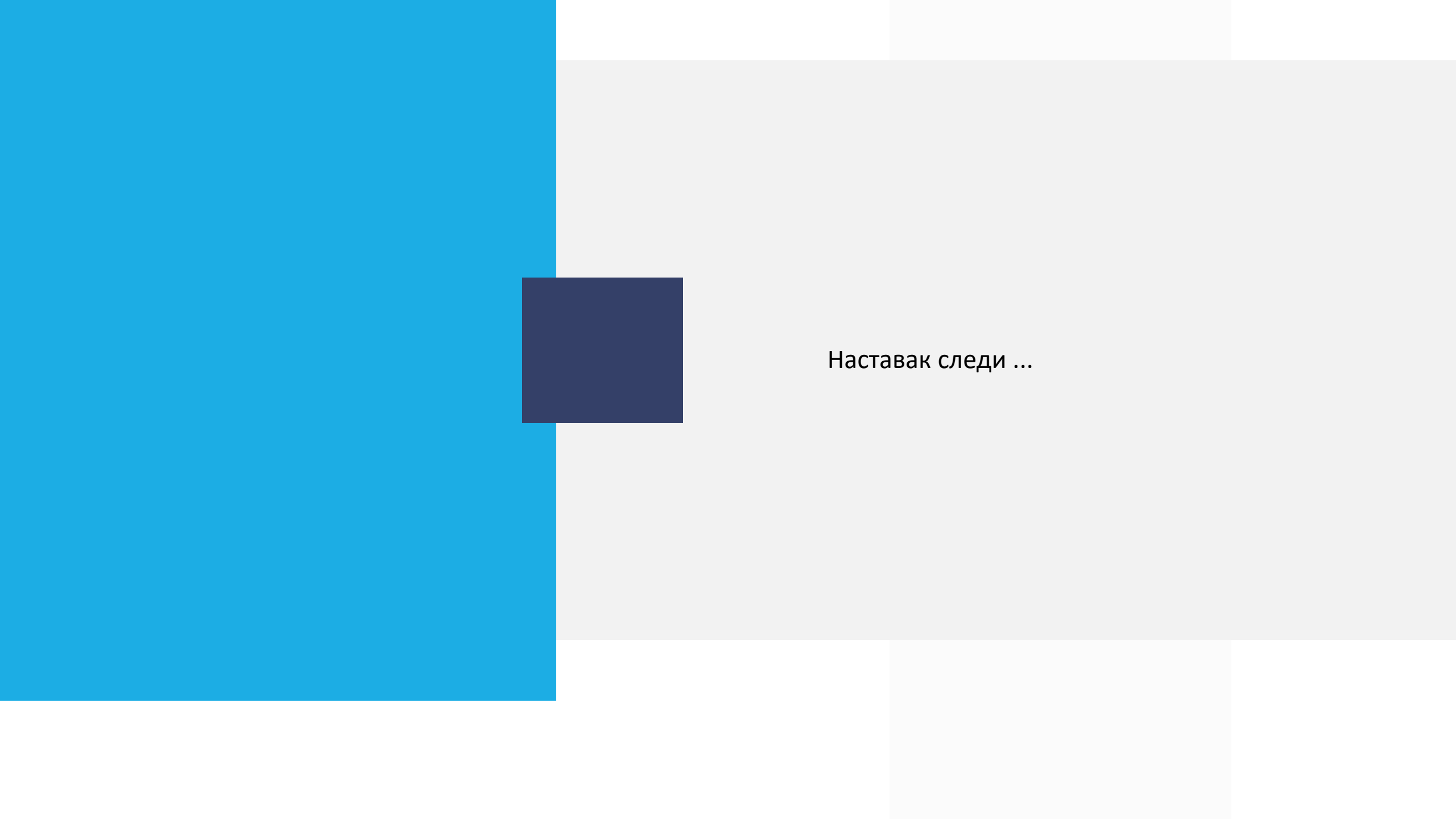
Ἐάν ὅρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ὀρθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς: καὶ ἐάν αἱ τοῦ τριγώνου πλευраὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

¹ VI. 1 Троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице.

² V. 11 Две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом.

³ V. 9 Величине, које су према истој величини у истој размери, једнаке су међу собом, и величине према којим је иста величина у истој размери једнаке су.

⁴ I. 39 Једнаки троуглови са истом основицом и са исте њене стране леже између истих паралелних.



Наставак следи ...