

Геометрија

Извор: К. У. Шахно

Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

<ЈУЛА 2020>

ПРИПРЕМА ЗА ФАКУЛТЕТ

ПРИМЕР 259



Геометрија

ПРИМЕР 259

- Странице АВ, ВС и СА $\triangle ABC$ тачкама М, N и Р подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

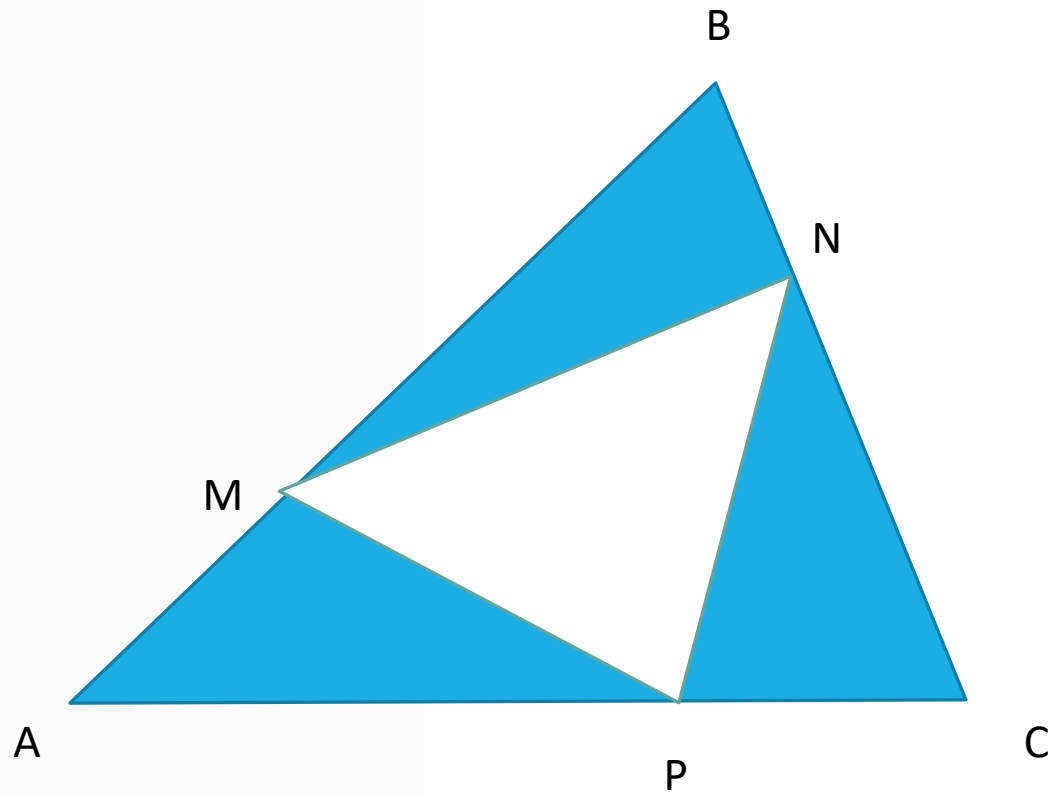
Наћи тај однос ако је познато да површина $\triangle MNP$ износи 0,28 површине $\triangle ABC$.

Геометрија

ПРИМЕР 259

- Странице AB , BC и CA $\triangle ABC$ тачкама M , N и P подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

Наћи тај однос ако је познато да површина $\triangle MNP$ износи $0,28$ површине $\triangle ABC$.



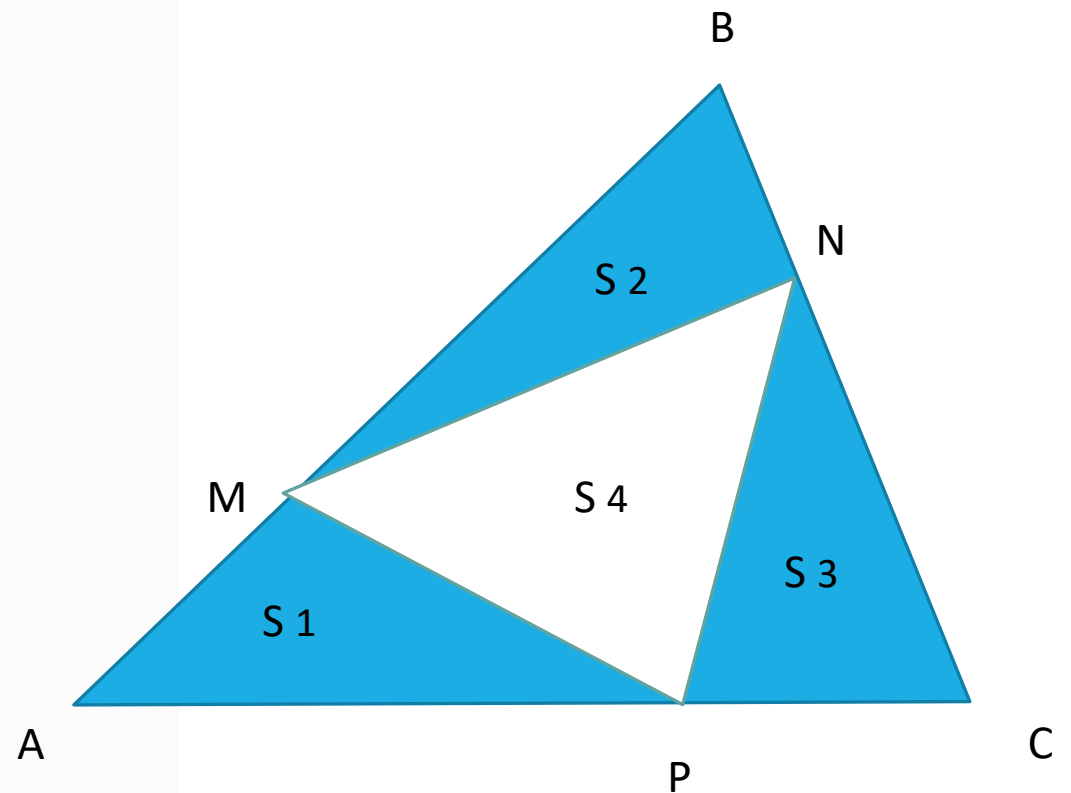
Геометрија

- Странице АВ, ВС и СА ΔABC тачкама М, N и Р подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

Наћи тај однос ако је познато да површина ΔMNP износи 0,28 површине ΔABC.

ПРИМЕР 259

Означимо површине троуглова AMP, MBN, NCP, MNP, AEC редом са S1, S2, S3, S4, S, а тражени однос $\frac{m}{n} = k$.



Геометрија

- Странице АВ, ВС и СА $\triangle ABC$ тачкама М, N и Р подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

Наћи тај однос ако је познато да површина $\triangle MNP$ износи 0,28 површине $\triangle ABC$.

ПРИМЕР 259

Означимо површине троуглова AMP, MBN, NCP, MNP, AEC редом са S_1, S_2, S_3, S_4, S , а тражени однос $\frac{m}{n} = k$.

Тада је могуће извести следеће односе:

$$AM = mx,$$

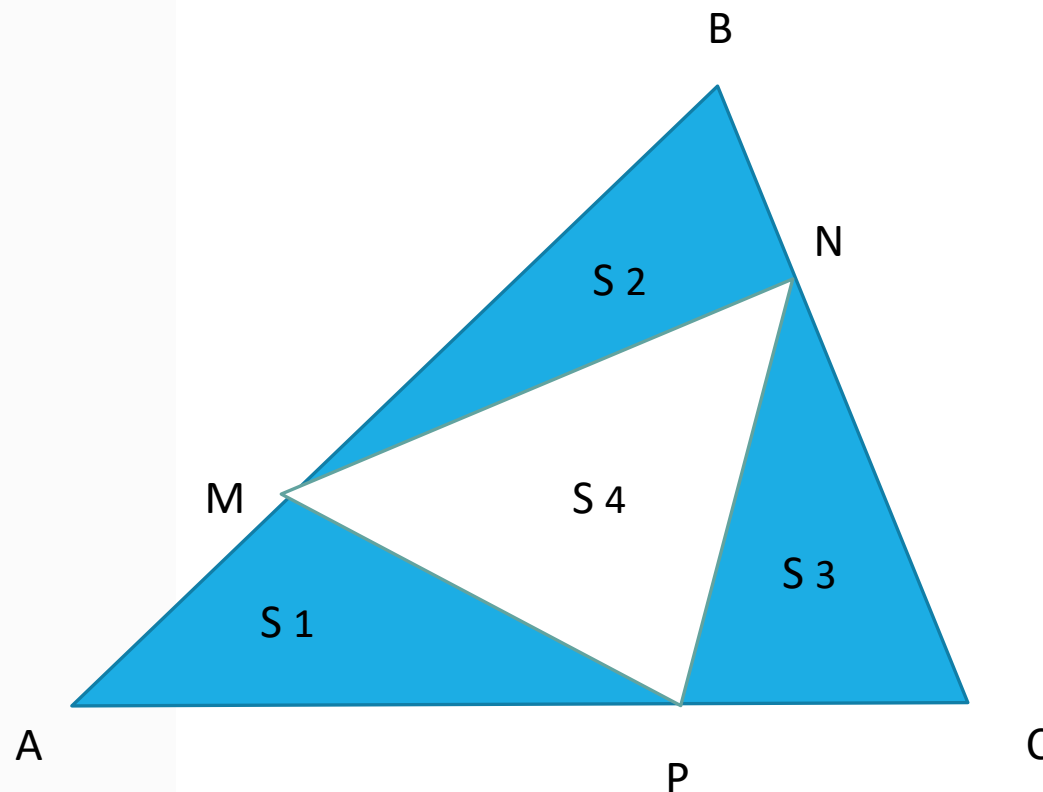
$$MB = nx,$$

$$AB = (m + n) x,$$

$$PC = my,$$

$$PA = ny,$$

$$AC = (m + n)y.$$



Геометрија

ПРИМЕР 259

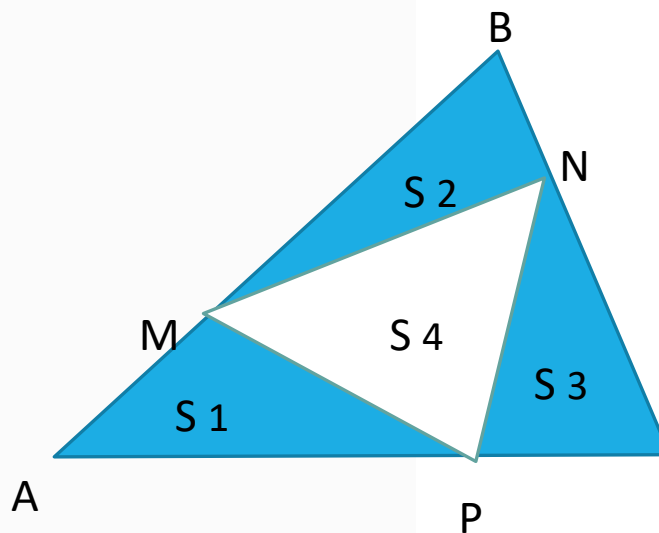
- Странице АВ, ВС и СА ΔABC тачкама М, N и Р подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

Наћи тај однос ако је познато да површина ΔMNP износи 0,28 површине ΔABC.

Означимо површине троуглова AMP, MBN, NCP, MNP, AEC редом са S1, S2, S3, S4, S, а тражени однос $\frac{m}{n} = k$.

Тада је могуће извести следеће односе:

AM = mx,
MB = nx,
AB = (m + n) x,
PC = my,
PA = ny,
AC = (m + n) y.



Зато што троуглови AMP и ABC имају заједнички угао у темену А могуће је успоставити следећи однос*:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC} \\ &= \frac{mx \cdot ny}{(m+n) \cdot x \cdot (m+n) \cdot y} \\ &= \frac{m \cdot n}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

Или

$$\frac{S_1}{S} = \frac{k}{(1+k)^2}$$

*Теорема о површини троугла ABC:

$$P(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

Геометрија

ПРИМЕР 259

- Странице АВ, ВС и СА ΔABC тачкама М, N и Р подељене су у истом односу тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA$.

Наћи тај однос ако је познато да површина ΔMNP износи 0,28 површине ΔABC.

Означимо површине троуглова AMP, MBN, NCP, MNP, AEC редом са S1, S2, S3, S4, S, а тражени однос $\frac{m}{n} = k$.

Тада је могуће извести следеће односе:

$$\begin{aligned} AM &= mx, \\ MB &= nx, \\ AB &= (m + n)x, \\ PC &= my, \\ PA &= ny, \\ AC &= (m + n)y. \end{aligned}$$

Зато што троуглови AMP и ABC имају заједнички угао у темену А могуће је успоставити следећи однос*:

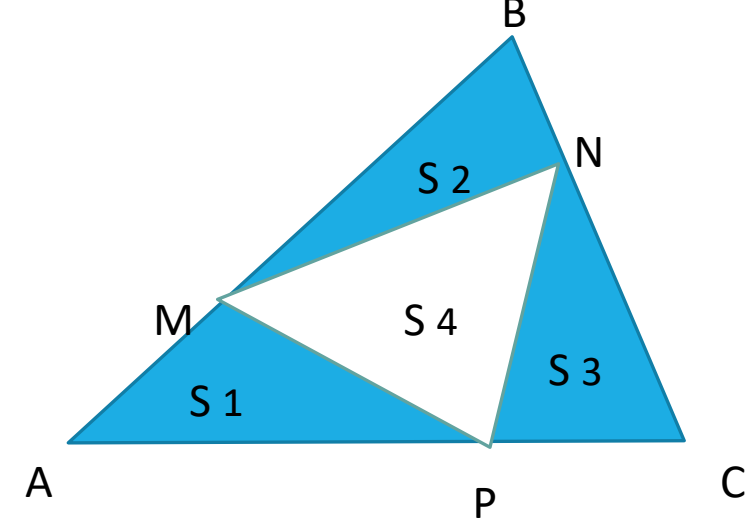
$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC} \\ &= \frac{mx \cdot ny}{(m + n) \cdot x \cdot (m + n) \cdot y} \\ &= \frac{m \cdot n}{(m + n)^2} \end{aligned}$$

Или

$$\frac{S_1}{S} = \frac{k}{(1 + k)^2}$$

*Теорема о површини троугла ABC:

$$\begin{aligned} P(\Delta ABC) &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$



Аналогно је

$$\frac{S_2}{S} = \frac{k}{(1+k)^2}, \quad \frac{S_3}{S} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Како је и $s_4 = 0,28 \cdot S$, или $\frac{S_4}{S} = \frac{7}{25}$ важи следећа једнакост:

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} &= \frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25}, \\ \text{односно} \quad \frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25} &= 1, \end{aligned}$$

односно

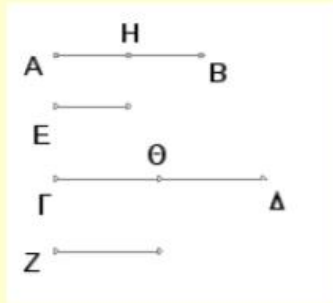
$$6k^2 - 13k + 6 = 0,$$

$$k_1 = \frac{3}{2}, \quad k_2 = \frac{2}{3}.$$

V. 1

Ако су дате неке величине, од којих је свака једнакоструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, биће и збир свих првих величина исто толики мултиплум збира свих других величина колики је и свака од првих величина мултиплум одговарајуће друге величине.

Нека су дате величине АВ, ГΔ, од којих је свака једноструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, Е, Z.



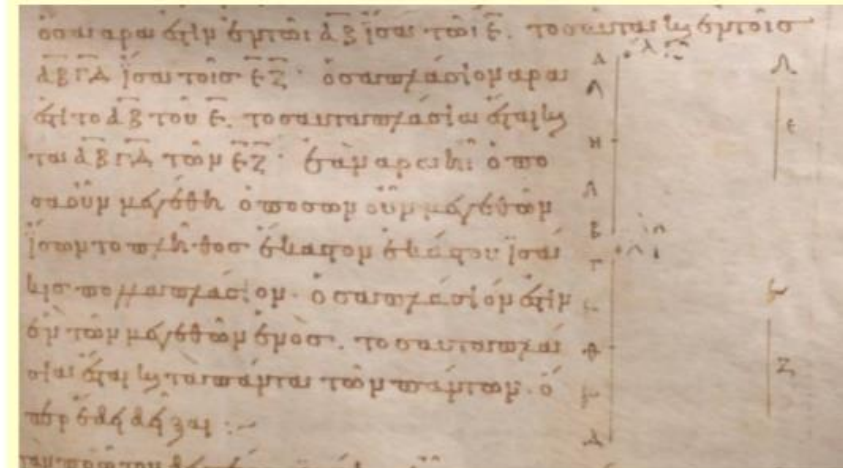
Тврдим да је збир АВ и ГΔ исто толико мултиплум збира Е и Z, колики је и АВ од Е.

Заиста, пошто је АВ, једнакоструки мултиплум од Е, колики је и ГΔ од Z, онда АВ садржи величину Е исто онолико пута колико ГΔ садржи величину Z. Поделимо АВ на величине АН и НВ, једнаке величини Е, и ГΔ на величине ГΘ и ΘΔ, једнаке величини Z; број величина АН, НВ биће истоветан са бројем величина ГΘ, ΘΔ. И пошто је АН једнако Е, а ГΘ величини Z, ако је још и АН једнако Е, онда је збир АН и ГΘ једнак збиру Е и Z. Из истих разлога је НВ једнако Е, и збир НВ и ΘΔ једнак збиру Е и Z. Према томе колико пута АВ садржи Е, исто толико пута збир АВ и ГΔ садржи збир Е и Z. Дакле АВ је исто толико мултиплум величине Е, колики је мултиплум збир АВ и ГΔ од збира Е и Z.

На овај начин, ако су дате неке величине, од којих је свака једноструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, биће и збир свих првих величина исто толики мултиплум збира свих других величина колики је и свака од првих величина мултиплум одговарајуће друге величине. А то је требало доказати.

Ἐάν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστὶν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

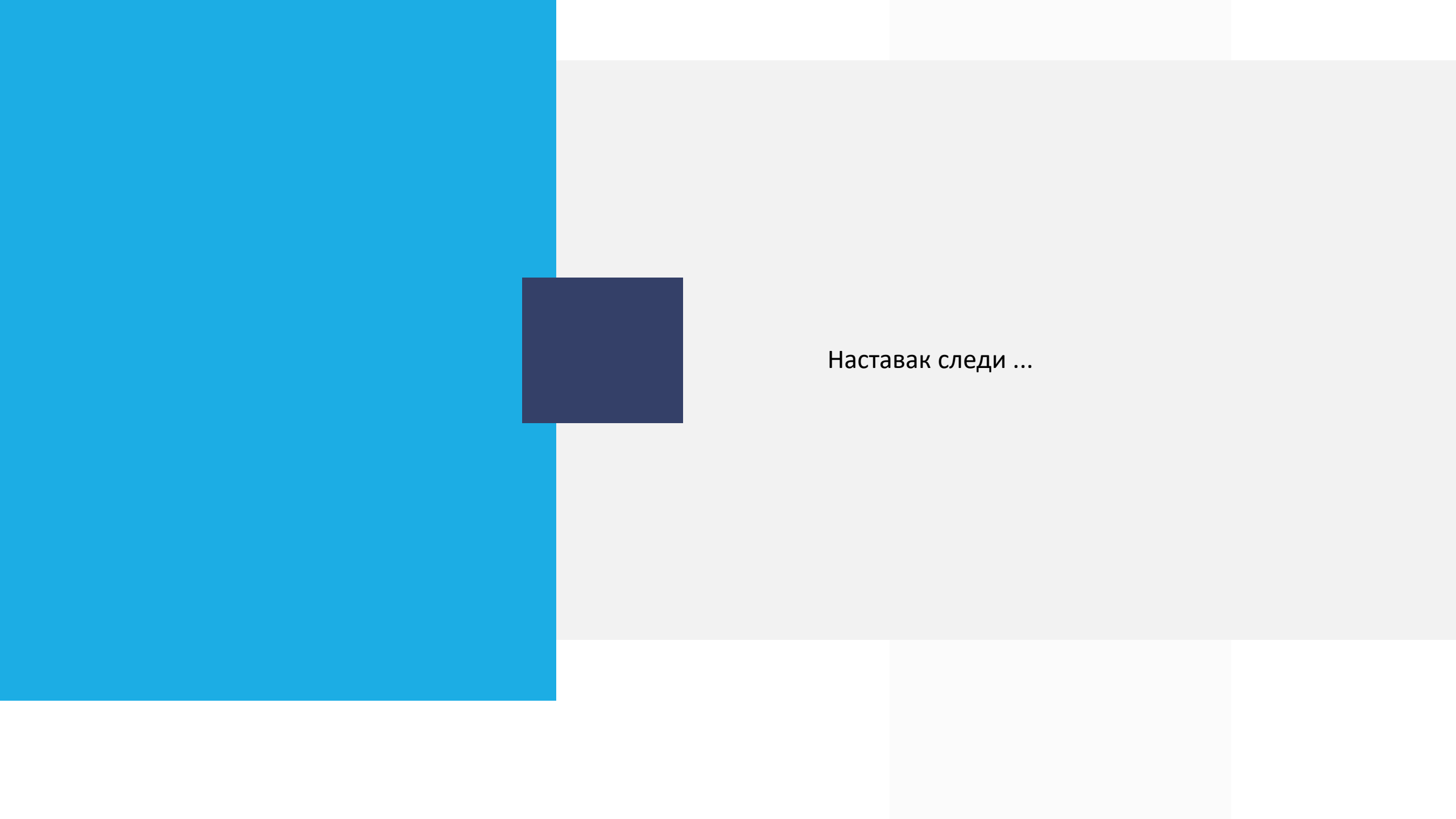
Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ АВ, ΓΔ ὅποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Е, Z ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον.



λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ АВ τοῦ Е, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ АВ, ΓΔ τῶν Е, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ АВ τοῦ Е καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Z, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ АВ μεγέθη ἴσα τῷ Е, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. διηρήσθω τὸ μὲν АВ εἰς τὰ τῷ Е μεγέθη ἴσα τὰ АН, НВ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ГΘ, ΘΔ: ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν АН, НВ τῷ πλῆθει τῶν ГΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν АН τῷ Е, τὸ δὲ ГΘ τῷ Z, ἴσον ἄρα τὸ АН τῷ Е, καὶ τὰ АН, ГΘ τοῖς Е, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ НВ τῷ Е, καὶ τὰ НВ, ΘΔ τοῖς Е, Z: ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ АВ ἴσα τῷ Е, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς АВ, ΓΔ ἴσα τοῖς Е, Z: ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ АВ τοῦ Е, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ АВ, ΓΔ τῶν Е, Z.

Ἐάν ἄρα ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστὶν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Наставак следи ...