Геометрија

Извор: К. У. Шахно
Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

<ЈУЛА 2020>

ПРИПРЕМА ЗА ФАКУЛТЕТ

ПРИМЕР 261

Геометрија

ПРИМЕР 261

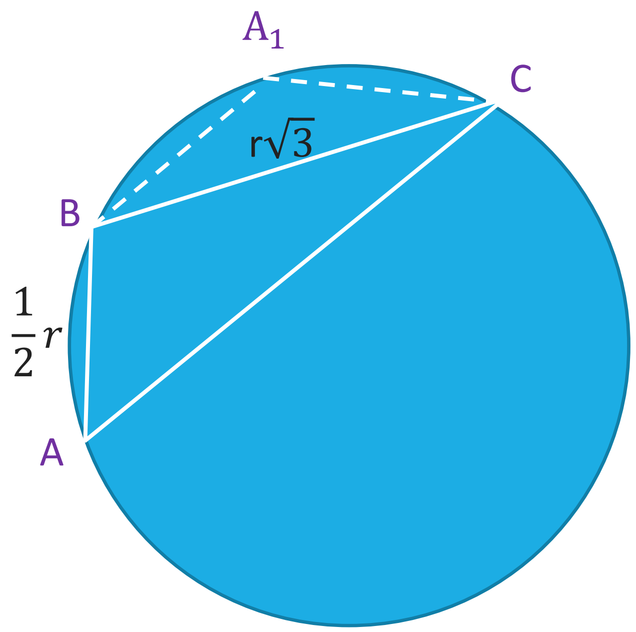
- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Геометрија

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.



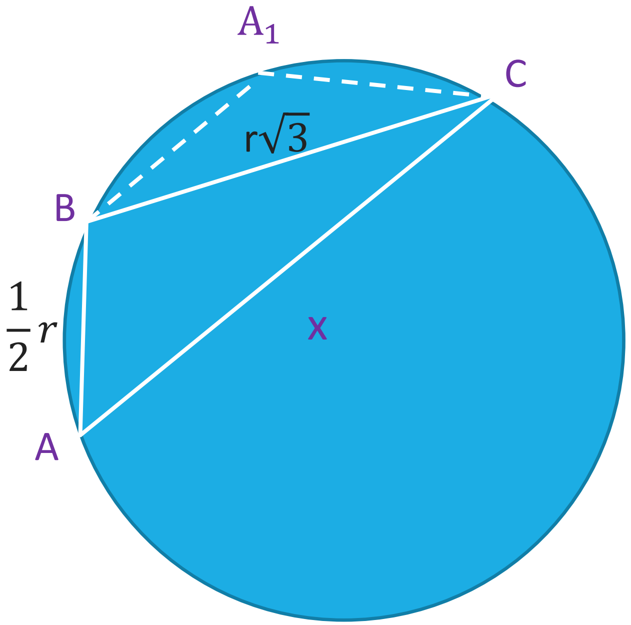
Геометрија

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261

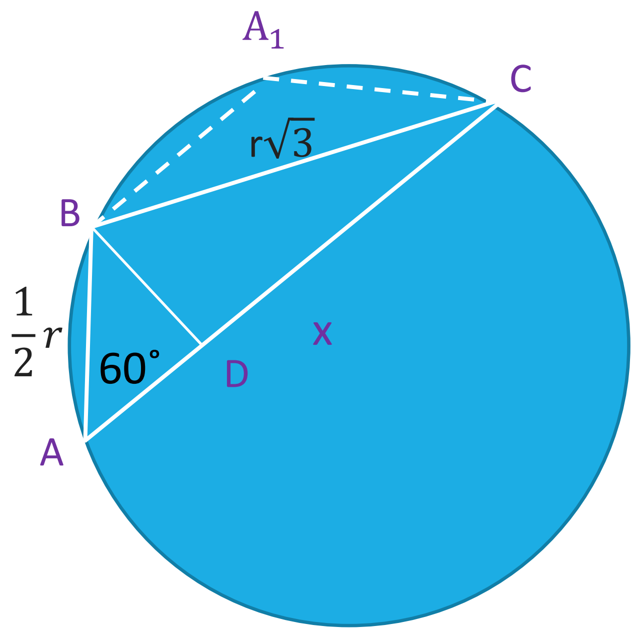
- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ је страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

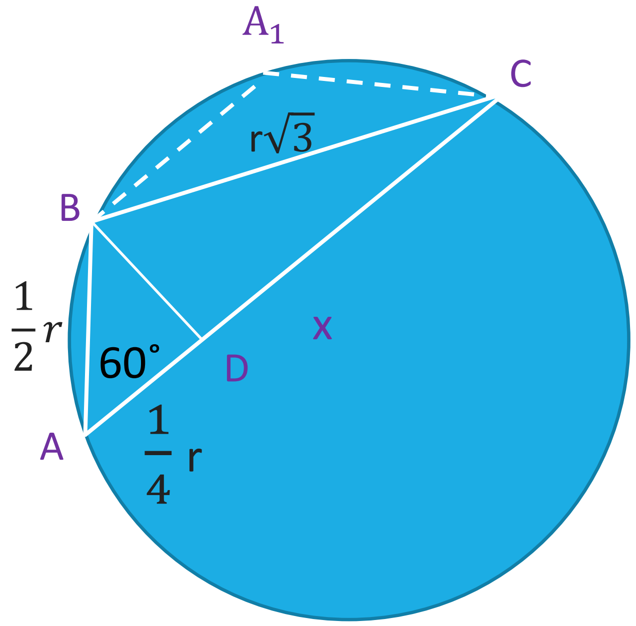
Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ je страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

Дуж AD као катета троугла BAD једнака је $\frac{1}{4}$ r.

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ је страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

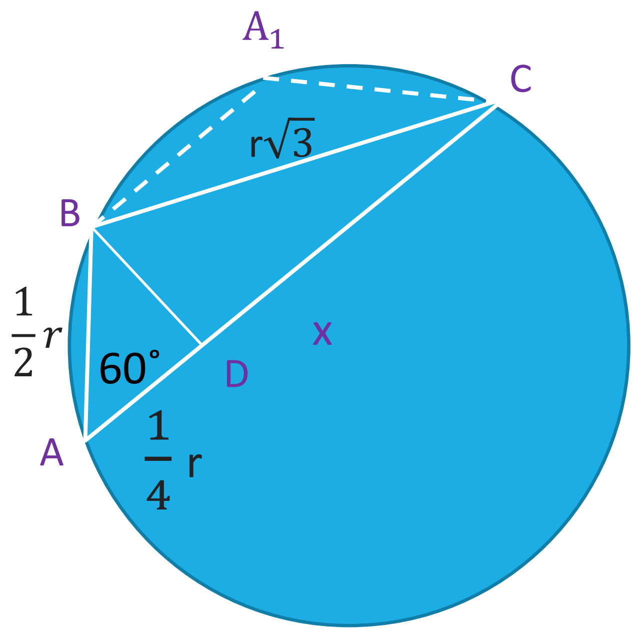
Према теореми о квадрату странице троугла која лежи наспрам оштрог угла добијамо:

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

Дуж AD као катета троугла BAD једнака је $\frac{1}{4}$ r.

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ je страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

Према теореми о квадрату странице троугла која лежи наспрам оштрог угла добијамо:

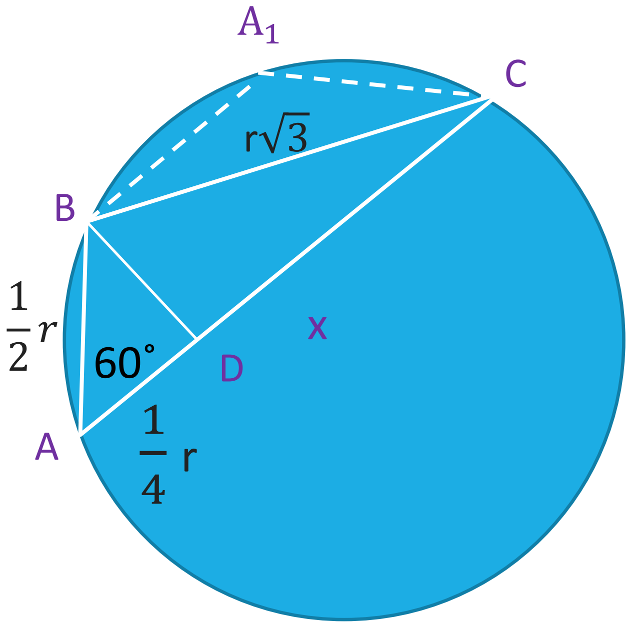
$$(r\sqrt{3})^2 = (\tfrac{1}{2}\ r)^2 + x^2 - 2x \cdot \tfrac{r}{4}$$

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

Дуж AD као катета троугла BAD једнака је $\frac{1}{4}$ r.

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 26

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ је страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

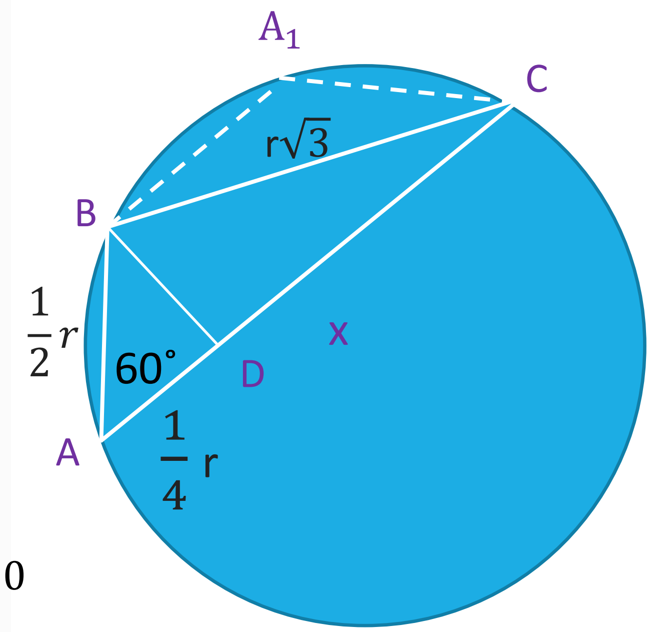
Дуж AD као катета троугла BAD једнака је $\frac{1}{4}$ r.

Према теореми о квадрату странице троугла која лежи насрам оштрог угла добијамо:

$(r\sqrt{3})^2 = (\frac{1}{2}\text{ r})^2 + \text{x}^2 - 2\text{x}\cdot\frac{r}{4}$, $4x^2 - 2\text{rx} - 11\,r^2 = 0$

Могућа су два решења - ΔABC и ΔA1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$r и r$\sqrt{3}$.
- Нађи дужину треће тетиве.

Угао BAC једнак је 60˚. (Тетива BC = r$\sqrt{3}$ је страница једнакостраничног троугла уписаног у дати круг и зато одговарајући централни угао има 120˚, а одговарајући периферијски 60˚.)

Одредимо тачку D тако да дужи BD и AC заклапају прав угао.

Дуж AD као катета троугла BAD једнака је $\frac{1}{4}$r.

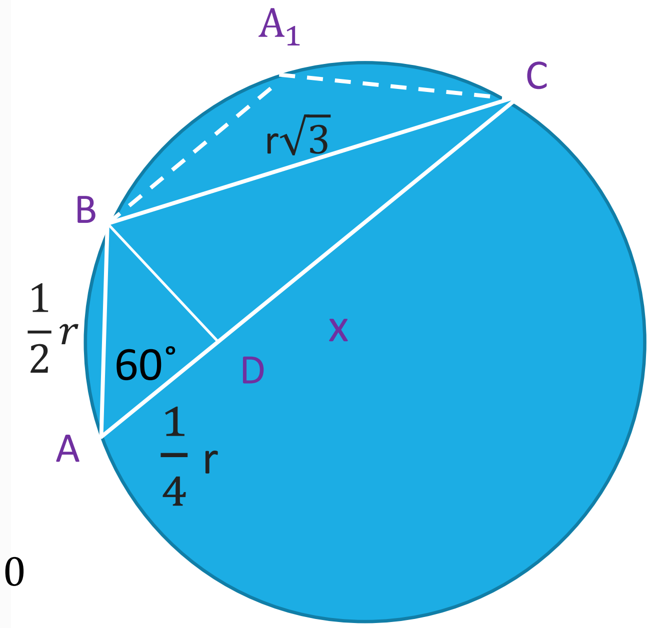
Према теореми о квадрату странице троугла која лежи наспрам оштрог угла добијамо:

$$(r\sqrt{3})^2 = (\tfrac{1}{2}r)^2 + x^2 - 2x \cdot \tfrac{r}{4}, \quad 4x^2 - 2rx - 11r^2 = 0$$

$$X = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1)$$

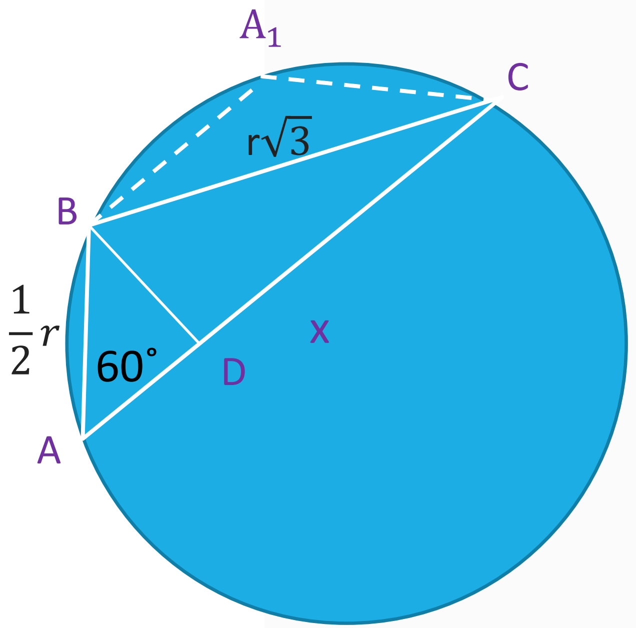
Могућа су два решења - ΔABC и ΔA_1BC.

Разматрамо први случај. Означимо страницу AC са x.



Геометрија

ПРИМЕР 261



$$X = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1)$$

- Три тетиве кружнице полупречника r образују троугао уписан у ту кружницу. Знамо да су дужине две од њих $\frac{1}{2}$ r и $r\sqrt{3}$.
- Наћи дужину треће тетиве.

Дужина тетиве A_1C добија се из троугла A_1BC ако се примени теорема о квардату странице која лежи наспрам тупог угла BA_1C.

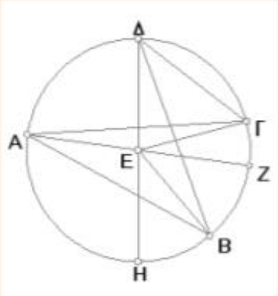
Решење је: $X = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} - 1)$.

Одговарајући прилог из ЕЕ

III. 20

У кругу је угао са теменом у центру (централни угао) једнак двоструком углу са теменом на периферији (периферијском углу), ако се ти углови ослањају на исти лук.

Нека је АВГ круг и ВЕГ угао са теменом у центру, а ВАГ са теменом на периферији, при чему се они ослањају на исти лук ВГ.



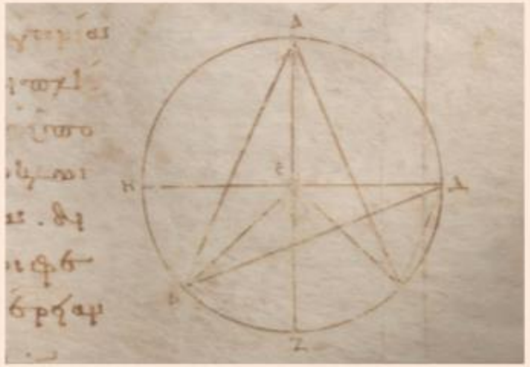
Тврдим да је угао ВЕГ једнак двоструком углу ВАГ.

Нека продужена АЕ сече круг у тачки Z.
Пошто је ЕА једнако ЕВ, биће и угао ЕАВ једнак углу ЕВА [I.5][1]. Према томе је збир углова ЕАВ и ЕВА једнак двоструком углу ЕАВ. Међутим, угао ВЕZ је једнак збиру углова ЕАВ и ЕВА [I.32][2], па је према томе угао ВЕZ двоструки угао ЕАВ. Из истих разлога је и угао ZЕГ једнак двоструком углу ЕАГ. Према томе је и цео угао ВЕГ једнак двоструком целом углу ВАГ.
Повуцимо сад другу изломљену линију и нека други угао буде ВΔГ; дуж што спаја Δ и Е продужимо до Н. На сличан начин се доказује да је угао НЕГ двоструки угао ЕΔГ, а угао НЕВ двоструки угао ЕΔВ. Према томе је угао ВЕГ двоструки угао ВΔГ.

На овај начин у кругу је угао са теменом у центру (централни угао) једнак двоструком углу са теменом на периферији (периферијском углу), ако се ти углови ослањају на исти лук. А то је требало доказати.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ:



λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστι διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστι διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστι διπλῆ. Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΕΔΒ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

[1] **I. 5** Код једнакокраких троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.
[2] **I.32** У сваком троуглу спољашњи угао образован продужењем једне стране једнак је двама несуседним унутрашњим угловима, а три унутрашња угла троугла једнаки су двама правим угловима.

Зорица Милатовић: Прилози за наставу у којима су коришћени електронски записи Елемената које је приредио проф. др Зоран Лучић и најстарије сачуване верзије Елемената познате као Е888

Наставак следи ...